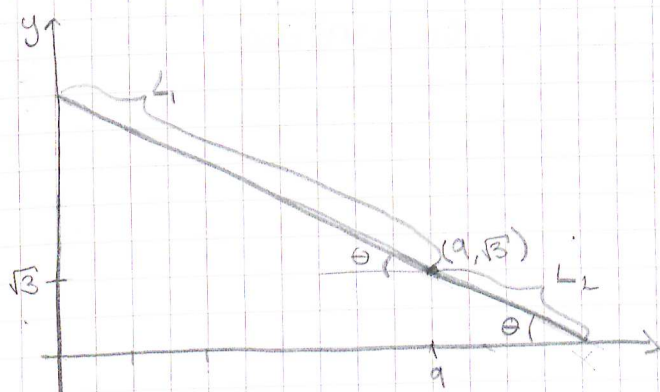


Övning 12 - torsdag LV7

RA 4.8.27, 4.8.37

RA 4.8.27

Vad är kortaste sträckan för en linje som har en ände på x-axeln och den andra änden på y-axeln samt passerar punkten $(a, \sqrt{3})$



Från bild: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

L = sträcka på linjen.

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{L_2} \Rightarrow L_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sin(\theta)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{a}{\cos(\theta)} + \frac{\sqrt{3}}{\sin(\theta)}$$

$$\text{Om } \theta \rightarrow 0^+ : L_2 \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow \infty$$

$$\text{Om } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- : L_1 \rightarrow \infty \Rightarrow L \rightarrow \infty$$

Alltså måste minivärdet finnas i en kritisk punkt

$$0 = \frac{dL}{d\theta} = -\frac{a}{\cos^2(\theta)} (-\sin(\theta)) - \frac{\sqrt{3}}{\sin^2(\theta)} \cos(\theta) =$$

$$= \frac{a \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \frac{\sqrt{3} \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

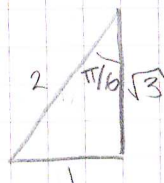
$$\Rightarrow a \sin^3(\theta) = \sqrt{3} \cos^3(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^3(\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{a}$$

$$\tan^3(\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



Detta ger

$$L = \frac{a}{\cos(\pi/6)} + \frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi/6)} = \frac{a}{\sqrt{3}/2} + \frac{\sqrt{3}}{1/2} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad (\text{i.e.})$$

2A 4.8.37

Ett fönster har omkrets 10m och har formen av en rektangel med överkanten ersatt av en halvcirkel. Hitta dimensionerna så att fönstret släpper igenom så mycket ljus som möjligt.



Längd halvcirkel: $\frac{\pi}{2}x$ blå sträcka
(diameter x)

Längd övriga sidor: $x+2y$ röd sträcka

Omkretsen är 10, alltså får vi:

$$\frac{\pi}{2}x + x + 2y = 10$$

Detta kan skrivas om som

$$(\pi+2)x + 4y = 20$$

$$\Rightarrow y = \frac{20 - (\pi+2)x}{4} = 5 - \frac{(\pi+2)x}{4}$$

Arean på halvcirkeln: $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

Arean på undre rektangel: $x \cdot y = x \left(5 - \frac{(\pi+2)x}{4}\right) = 5x - \frac{(\pi+2)x^2}{4}$

Totala arean blir därmed

$$A = \frac{\pi x^2}{8} + 5x - \frac{(\pi+2)x^2}{4}$$

För att maximera ljusinsläppet vill vi maximera fönstrets area.
Vill hitta kritiska punkter till A

$$\delta = \frac{dA}{dx} = \frac{\pi x}{4} + 5 - \frac{(\pi+2)x}{2}$$

$$0 = \pi x + 20 - 2(\pi+2)x$$

$$(2\pi+4)x - \pi x = 20$$

$$(\pi+4)x = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{\pi+4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= 5 - \frac{(\pi+2) \frac{20}{\pi+4}}{4} = \frac{20(\pi+4)}{4(\pi+4)} - \frac{20(\pi+2)}{4(\pi+4)} = \frac{20\pi+80-20\pi-40}{4(\pi+4)} = \\ &= \frac{40}{4(\pi+4)} = \frac{10}{\pi+4} \end{aligned}$$

För att maximera ljusinsläppet bör fönstrets bredd vara $\frac{20}{\pi+4}$ och höjden på den rektangulära delen $\frac{10}{\pi+4}$