

Övning 3 - tisdag LV3 (13/9-2016)

RA 10.3.5, 10.3.11
10.4.28
1.2.11, 1.2.13
1.2.73, 1.5.12

RA 10.3.5

Hitta en enhetsvektor som är ortogonal mot vektorerna $u=i+j$ och $v=j+2k$

Gör som ett ekvationssystem, inte kryssprodukt!

Börjar med att hitta en vektor w som är ortogonal mot u och v .

$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$$

Ekvationssystem

$$\begin{cases} u \cdot w = 0 \\ v \cdot w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 0 \\ w_2 + 2w_3 = 0 \end{cases}$$

Under bestämt system så vi har en fri variabel, $w_3 = t, t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = -w_2 = 2t \\ w_2 = -2w_3 = -2t \\ w_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow w = 2t i - 2t j + t k$$

Vill ha en enhetsvektor. Bestäm t så att $|w|=1$

$$|w| = \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2 + t^2} = \sqrt{4t^2 + 4t^2 + t^2} = \sqrt{9t^2} = 3|t| = 1$$

$$\Rightarrow 3|t| = 1 \Rightarrow |t| = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{3}$$

$$w = \pm \left(\frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k \right)$$

RA 10.3.11

Verifiera med hjälp av kryssproduktens definition eller determinanternas egenskaper att

$$u \cdot (u \times v) = 0, \quad v \cdot (u \times v) = 0$$

$$u \cdot (u \times v) = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1 u_2 v_3 - u_1 v_2 u_3 - u_2 u_1 v_3 + u_2 v_1 u_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 v_1 u_2 = 0$$

$$v \cdot (u \times v) = -v \cdot (v \times u) = 0$$

RA 10.4.28

två plan
linjen är
skärningslinjen
mellan dem

Hitta avståndet mellan origo och linjen $x+y+z=0$, $2x-y-5z=1$

Avståndet mellan en punkt P_0 och en linje som L som går igenom punkten P_1 och är parallell med vektorn v ges av

$$s = \frac{|(r_0 - r_1) \times v|}{|v|}$$

där r_0 och r_1 är positionsvektorer för P_0 resp P_1 . v får inte vara nollvektorn

I vårt fall:

$$r_0 = 0$$

Vektor v som är parallell med linjen

$$v = (i+j+k) \times (2i-j-5k) = (-5-(-1))i + (2-(-5))j + (-1-2)k = -4i + 7j - 3k$$

Punkt på linjen: (godtycklig)

$$z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}j$$

Har all vi behöver

$$r_0 - r_1 = 0 - (\frac{1}{3}i - \frac{1}{3}j) = -\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j$$

$$(r_0 - r_1) \times v = (-\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j) \times (-4i + 7j - 3k) = (-1-0)i + (0-1)j + (-\frac{7}{3}-(-\frac{4}{3}))k = -i - j - k$$

$$|(r_0 - r_1) \times v| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$|v| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+49+9} = \sqrt{74}$$

Avståndet blir

$$s = \frac{|(r_0 - r_1) \times v|}{|v|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{74}}$$

RA 1.2.11

Beräkna gränsvärdet eller förklara varför det inte finns

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

RA 1.2.13

Beräkna gränsvärdet eller förklara varför det inte finns

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

RA 1.2.75 Instängningssatsen

Om $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos(x)$ för alla x . Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Instängningssatsen

Antag att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ för alla x i ett intervall som innehåller punkten a .
Antag också att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

Då är

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Vi har

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - x^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(x) = 2 \quad (\cos(0) = 1)$$

Enligt instängningssatsen har vi då

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

RA 1.5.12

Använd den formella definitionen av gränsvärden för att verifiera att

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x) = 1$$

Formell definition av gränsvärden

Vi säger att $f(x)$ går mot gränsen L då x går mot a och skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

om följande villkor är uppfyllt:

För varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$, möjligen beroende av ε , så att om $0 < |x - a| < \delta$ så att x är i f 's definitionsmängd och

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

$|5 - 2x - 1| < \varepsilon$ gäller om $|2x - 4| < \varepsilon$, och därmed även om $|x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Detta bekräftar gränsvärdet