Övning 5 - torsdag LV4 (22/9 - 2016)

RA: 2.3.19, 2.4.29
2.4.37, 2.5.5
2.5.35, 2.5.37
2.5.57

RA 2.3.19

Beräkna derivatan

$$y = \frac{2+t+t^2}{\sqrt{t}}$$

$$y = \frac{2+t+t^2}{\sqrt{t}} = 2t^{-1/2} + t^{1/2} + t^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\right)2t^{-3/2} + \frac{1}{2}t^{-1/2} + \frac{3}{2}t^{1/2} = \frac{-1}{t\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{t}}{2} = \frac{-2}{2t\sqrt{t}} + \frac{t}{2t\sqrt{t}} + \frac{3t^2}{2t\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{3t^2+t-2}{2t\sqrt{t}}$$

RA 2.4.29

Uttryck derivatan av den givna funktionen i termer av derivatan f' av den deriverbara funktionen f

$$g(t) = f(2-3f(4-5t))$$

$$g'(t) = f'(2-3f(4-5t)) \cdot \underbrace{(-3f'(4-5t)) \cdot (-5)}_{\text{inre derivata}} = 15f'(2-3f(4-5t))f'(4-5t)$$

RA 2.4.37

Hitta ekvationen för linjen som tangerar

$$y = (1+x^{2/3})^{3/2}$$

vid $x=-1$

Linjen som tangerar linjen har lutningen $\frac{dy(-1)}{dx}$ och passerar punkten $(-1, y(-1))$

$$y(-1) = (1+(-1)^{2/3})^{3/2} = (1+1)^{3/2} = 2^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(1+x^{2/3})^{1/2} \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = (1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$$

$$\frac{dy(-1)}{dx} = (1+(-1)^{2/3})^{1/2}(-1)^{-1/3} = (1+1)^{1/2} \cdot (-1) = -\sqrt{2}$$

Ekvation för linje med lutning k och passerar (x_0, y_0):

$$y - y_0 = k(x-x_0)$$

I vårt fall

$$y - 2^{3/2} = -\sqrt{2}(x-(-1)) \Rightarrow y = -\sqrt{2}x + 2^{3/2} - \sqrt{2}$$

RA 2.5.5

Beräkna derivatan. (förenkla uttrycket innan och efter derivering)

$y = \tan(\pi x)$

$\left(z = \tan(x) \Rightarrow z' = \sec^2(x), \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \right)$

$y' = \pi \sec^2(\pi x)$

RA 2.5.35

Beräkna derivatan

$y = \sin(\cos(\tan(t)))$

$y' = \cos(\underbrace{\cos(\tan(t))}_{ID}) \cdot (-\sin(\underbrace{\tan(t)}_{ID})) \cdot \sec^2(t) = -\cos(\cos(\tan(t)))\sin(\tan(t))\sec^2(t)$

RA 2.5.37

Givet att

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Visa att

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Derivera båda sidor

$\frac{d}{dx} \sin(2x) = \frac{d}{dx} 2\sin(x)\cos(x)$

$2\cos(2x) = 2\cos(x)\cos(x) - 2\sin(x)\sin(x)$

Dela med 2

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

RA 2.5.57

Beräkna

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos(h)}{h^2}$$

med metoden som används i Exempel 1.

> Exempel 1
>
> Visa att $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$
>
> Formel för halva vinkeln: $\cos(h) = 1 - 2\sin^2(h/2)$
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h} = \quad \{\theta = h/2\}$$
>
> $$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta} \sin(\theta) = -(1)(0) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin^2(h/2)}{h^2} \overset{\theta = h/2}{=} \lim_{\theta \to 0} \frac{2\sin^2(\theta)}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2} =$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\frac{\sin(\theta)}{\theta}}_{\to 1}\Big)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$