Övning 6 – fredag LV4 (23/9 – 2016)

RA 2.6.29, 2.7.13
2.7.15, 2.8.11,
2.8.17, 2.8.31

RA 2.6.29

Vi vet att om f, g går att derivera två gånger är

$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

Beräkna motsvarande uttryck för $(fg)^{(3)}$ och $(fg)^{(4)}$

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(3)} &= \frac{d}{dx}(fg)'' = \\
&= \frac{d}{dx}(f''g + 2f'g' + fg'') = \\
&= f^{(3)}g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg^{(3)} = \\
&= f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(4)} &= \frac{d}{dx}(fg)^{(3)} = \\
&= \frac{d}{dx}(f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}) = \\
&= f^{(4)}g + f^{(3)}g' + 3f^{(3)}g' + 3f''g'' + 3f''g'' + 3f'g^{(3)} + f'g^{(3)} + fg^{(4)} = \\
&= f^{(4)}g + 4f^{(3)}g' + 6f''g'' + 4f'g^{(3)} + fg^{(4)}
\end{aligned}
$$

Kan du gissa formeln för $(fg)^{(n)}$

Från tidigare beräkningar kan vi se att koefficienterna är binomialkoefficienterna.

Formeln för $(fg)^{(n)}$ blir då

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} f^{(n-k)} g^{(k)}
\end{aligned}
$$

RA 2.7.13

Hur snabbt förändras arean A av en kvadrat med avseende på sidan s då $s = 4$ m

$A(s) = s^2$

$\frac{dA}{ds} = 2s$

När $s=4$m blir areaförändringen 8 m^2/m

RA 2.7.15

Beräkna förändringen av diametern, D, av en cirkel med avsende på arean A

$A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow D^2 = \frac{4A}{\pi} \Rightarrow D = \pm\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

$D(A) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{A}$

$\frac{dD}{dA} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A\pi}}$ [l.e/a.e]

RA 2.8.11

Hitta intervallen för då funktionen är växande och när den är minskande

$y = x^3 + 6x^2$

Funktionen är växande då $y'>0$, minskande då $y'<0$

$y' = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

Kritiska punkter (där y' kan växla tecken), $x=0$, $x=-4$.

För $x>0$: $3\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(x+4)}_{>0} > 0$

För $-4<x<0$: $3\underbrace{x}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{>0} < 0$

För $x<-4$: $3\underbrace{x}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{<0} > 0$

y växande på $(-\infty,-4)$ och $(0,\infty)$

y minskande på $(-4,0)$

RA 2.8.17

Hitta intervallen för då funktionen är växande och när den är minskande

$f(x) = x^3(5-x)^2$

Växande då $f'(x) > 0$, minskande då $f'(x) < 0$

$$f'(x) = 3x^2(5-x)^2 + x^3 \cdot 2(5-x)(-1) =$$
$$= 3x^2(5-x)^2 - 2x^3(5-x) =$$
$$= x^2(5-x) \cdot 3(5-x) - x^2(5-x) \cdot 2x =$$
$$= x^2(5-x)(15-3x-2x) =$$
$$= x^2(5-x)(15-5x) =$$
$$= 5x^2(5-x)(3-x)$$

Kritiska punkter: $x=0$, $x=3$, $x=5$

$x<0$: $5\underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(5-x)}_{>0}\underbrace{(3-x)}_{>0} > 0$

$0<x<3$: $5\underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(5-x)}_{>0}\underbrace{(3-x)}_{>0} > 0$

$3<x<5$: $5\underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(5-x)}_{>0}\underbrace{(3-x)}_{<0} < 0$

$5<x$: $5\underbrace{x^2}_{>0}\underbrace{(5-x)}_{<0}\underbrace{(3-x)}_{<0} > 0$

f växande på $(-\infty, 0), (0,3), (5,\infty)$

f minskande på $(3,5)$

RA 2.8.31

Antag att $f''(x)$ existerar på ett intervall I och att f är noll på 3 skilda punkter på I. Visa att $f''(x)$ är noll på minst ett ställe på I

Låt a, b, c vara punkter på I så att $f(a)=f(b)=f(c)=0$, $a<b<c$

Enligt medelvärdessatsen finns en punkt r i (a,b) så att $f'(r)=0$ och en punkt s i (b,c) så att $f'(s)=0$

Enligt medelvärdessatsen finns det då också en punkt t i (r,s) så att $f''(t)=0$.