

Övning 7 - tisdag LV5 (27/9-2016)

RA 2.9.11, 2.9.17
3.1.12, 3.1.29
3.3.59

RA 2.9.11

Hitta tangenten till

$$\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$$

i punkten $(-1, -1)$

Omformulera

$$\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 2 \iff x^4 + y^4 = 2x^3y$$

Derivera med avseende på x :

$$4x^3 + 4y^3y' = 6x^2y + 2x^3y'$$

Vill ta reda på y' . Insättning av $x=-1$ och $y=-1$ i uttrycket:

$$4 \cdot (-1)^3 + 4(-1)^3y' = 6(-1)^2(-1) + 2(-1)^3y'$$

$$-4 - 4y' = -6 - 2y'$$

$$2 = 2y' \Rightarrow y' = 1$$

Tangenten är en rät linje med lutning 1 och passerar $(-1, -1)$

$$\Rightarrow y - (-1) = 1 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y + 1 = x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = x}}$$

RA 2.9.17

Uttryck y'' i termer av x och y

$$xy = x + y$$

Derivera med avseende på x

$$y + xy' \underset{(*)}{=} 1 + y' \Rightarrow xy' - y' = 1 - y \Rightarrow y'(x-1) = 1-y \Rightarrow y' \underset{(**)}{=} \frac{1-y}{x-1}$$

Derivera $(*)$ med avseende på x

$$y' + y' + xy'' = y'' \Rightarrow xy'' - y'' = -2y' \Rightarrow y''(x-1) = -2y' \Rightarrow y'' = -\frac{2y'}{x-1}$$

Sätt in $(**)$ i senaste uttrycket

$$y'' = -\frac{2\left(\frac{1-y}{x-1}\right)}{x-1} = -\frac{2(1-y)}{(x-1)^2} = \frac{2(y-1)}{(x-1)^2}$$

RA 3.1.12

Visa att f är en ^{one-to-one} injektiv funktion och beräkna f^{-1} .

Specifiera definitions- och värdemängderna för f och f^{-1} .

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Om funktionen är invers gäller

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Vi vill visa att detta gäller

Om $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow x_1 \sqrt{x_2^2+1} = x_2 \sqrt{x_1^2+1}$$

$$x_1^2(x_2^2+1) = x_2^2(x_1^2+1)$$

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 = x_2^2 x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

Från (*) ser vi att x_1 och x_2 måste ha samma tecken. Därmed har vi att $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Funktionen är injektiv.

Vi vill nu hitta f^{-1} . Låt $x = f^{-1}(y)$. Det betyder att $y = f(x)$.

$$\Rightarrow y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y \sqrt{x^2+1} = x$$

$$y^2(x^2+1) = x^2$$

$$y^2 x^2 + y^2 = x^2$$

$$y^2 = x^2 - x^2 y^2$$

$$y^2 = x^2(1-y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

Vi vet att x och $f(x)$ har samma tecken. Därmed är

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Vi undrar också över definitions- och värdemängderna

$$D_f = V_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$$

$$V_f = D_{f^{-1}} = (-1, 1)$$

RA 3.1.29

Visa att

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

har en invers funktion och beräkna $(f^{-1})'(2)$

Vi beräknar $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{12x^2(x^2+1) - 4x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 12x^2 - 8x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^4 + 12x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Vi kan se att $f'(x) > 0$ för alla x utom $x=0$. Därmed är funktionen invers och f^{-1} existerar

Formel för invers funktions derivata

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Om $x = f^{-1}(y)$ så är $y = f(x)$. Vi vill ta reda på vad x är då $y=2$

$$x = f^{-1}(2)$$

$$2 = f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1} \Rightarrow 2x^2+2 = 4x^3$$

Vi kan se att $x=1$ löser ekvationen.

Eftersom $f(1)=2$ och f är injektiv har vi att $f^{-1}(2)=1$

Vi vill beräkna

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) \Big|_{y=2} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \Big|_{y=2} = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{4 \cdot 1^2(1^2+3)}{(1^2+1)^2}} = \frac{2^2}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

RA 3.3.59

Låt $f(x) = xe^{-x}$

När är f växande och när är f minskande?

Skissa grafen till f

f är växande då $f'(x) > 0$ och minskande då $f'(x) < 0$

$$f(x) = xe^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$$

$f'(x) > 0$ då $x < 1 \Rightarrow f$ växande för $x < 1$

$f'(x) < 0$ då $x > 1 \Rightarrow f$ minskande för $x > 1$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

