

Övning 9 - tisdag LV6 (4/10-2016)

RA 3.6.5, 3.6.7d)
4.1.1, 4.1.19
4.1.25, 4.2.22
4.2.23

3.6.5

Beräkna derivatan av $\sinh^{-1}(x)$, $\cosh^{-1}(x)$ och $\tanh^{-1}(x)$.

Därefter, beräkna integralerna $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ och $\int \frac{dx}{1-x^2}$ i termer av $\sinh^{-1}(x)$, $\cosh^{-1}(x)$ och $\tanh^{-1}(x)$.

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad -1 < x < 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh^{-1}(x) &= \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) &= \frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh^{-1}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1}(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + C \quad (x > 1)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x) + C \quad (-1 < x < 1)$$

RA 3.6.7 d)

Förenkla uttrycket

$$\frac{\cosh(\ln(x)) + \sinh(\ln(x))}{\cosh(\ln(x)) - \sinh(\ln(x))}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\sinh(\ln(x)) = \frac{1}{2}(e^{\ln(x)} - e^{-\ln(x)}) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh(\ln(x)) = \frac{1}{2}(e^{\ln(x)} + e^{-\ln(x)}) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cosh(\ln(x)) + \sinh(\ln(x))}{\cosh(\ln(x)) - \sinh(\ln(x))} = \frac{\frac{1}{2x}((x^2 + 1) + (x^2 - 1))}{\frac{1}{2x}((x^2 + 1) - (x^2 - 1))} = \frac{x^2 + 1 + x^2 - 1}{x^2 + 1 - x^2 + 1} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

RA 4.1.1

Bestäm förändringshastigheten av en kvadrats area om sidan är 8 cm lång och ökar med 2 cm/min

Vid tiden t har kvadraten sida s och arean A och vi har sambandet $A = s^2$, Det ger

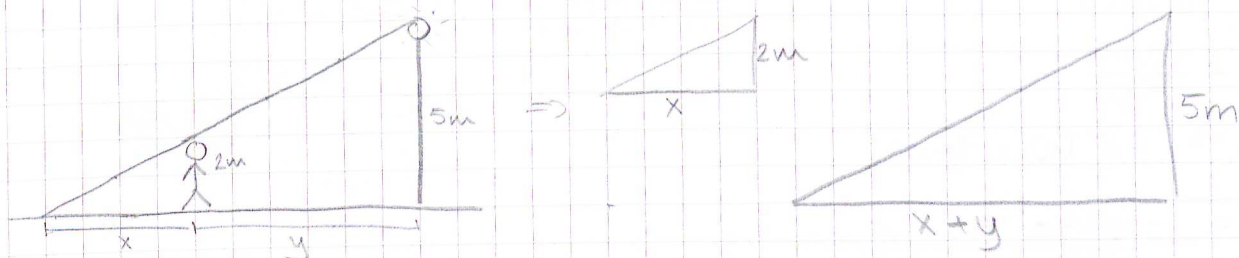
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 2s \cdot \frac{ds}{dt}$$

Om $s = 8$ cm och $\frac{ds}{dt} = 2$ cm/min får vi

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 8 \cdot 2 = 32 \text{ cm}^2/\text{min}$$

RA 4.1.19

En 2m lång man går mot en lyktstolpe med hastigheten 0.5m/s. Om lampan sitter 5m upp på lyktstolpen, hur snabbt minskar längden av mannens skugga när han är 3m från lyktstolpen?



Pga likformighet hos trianglarna

$$\frac{x}{2} = \frac{x+y}{5} \Rightarrow 5x = 2x + 2y \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dy}{dt}$$

Vi vet att $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$ m/s

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \text{ m/s}$$

Vi vill även veta hur snabbt skuggans huvud rör sig!

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \text{ m/s}$$

4.1.25

Sågspån faller ner i en hög med hastigheten $\frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$. Om högen behåller formen av en cirkulär kon med höjd lika med halva diametern vid basen. Hur snabbt ökar höjden på högen när den är 3m hög?

Låt V vara konens volym, r konens radie vid basen och h konens höjd. Dessutom har vi $r=h$. Därmed har vi

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Vi har att $h=3\text{m}$ och $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}$. Därmed får vi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi 3^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18\pi} \text{ m/min}$$

RA 4.2.22

Applicera Newtons metod till $f(x) = x^{1/3}$ med $x_0 = 1$. Beräkna x_1, x_2, x_3, x_4 . Vad händer? Finn en formel för x_n .

Newton's formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x^{1/3}, \quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3} x_n^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

Vi har $x_0 = 1$

$$x_1 = -2x_0 = -2$$

$$x_2 = -2x_1 = 4$$

$$x_3 = -2x_2 = -8$$

$$x_4 = -2x_3 = 16$$

Vi får att $x_n = (-2)^n$. "Approximationerna" oscillerar med allt större avstånd från roten $x=0$

RA 4.2.23

Applicera Newtons metod på $f(x) = x^{2/3}$ med $x_0 = 1$. Beräkna x_1, x_2, x_3 och x_4 . Vad händer? Finn en formel för x_n .

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

Newton's formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{2/3}}{\frac{2}{3} x_n^{-1/3}} = x_n - \frac{3}{2} x_n = -\frac{1}{2} x_n$$

Vi har $x_0 = 1$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} x_2 = -\frac{1}{8}$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{16}$$

Formel för x_n : $x_n = (-\frac{1}{2})^n$

Approximationerna oscillerar runt roten $x=0$ och konvergerar mot den