

1. Med omskrivning med hjälp av polära koordinater $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ fås

$$\begin{aligned} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2 - xy^2}} &= e^{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2-xy^2}} = \{\text{polära koordinater}\} = \\ &= e^{\frac{\ln(1+r^2)}{r^2+r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}} = \{\text{Taylorutveckling } \ln(1+t) = t + O(t^2), t \rightarrow 0\} = \\ &= e^{\frac{r^2+O(r^4)}{r^2+r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}} = e^{\frac{1+O(r^2)}{1+r \cos \theta \sin^2 \theta}} \rightarrow e \end{aligned}$$

då $r \rightarrow 0$ oberoende av θ .

Svar: e

2. $f(x, y) = \sin(\frac{x}{y})$ ger $\nabla f(x, y) = (\frac{1}{y} \cos(\frac{x}{y}), -\frac{x}{y^2} \cos(\frac{x}{y}))$ och alltså fås

$$\nabla f(1, 1) = (\cos 1, -\cos 1).$$

Vidare gäller

$$f'_v(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}.$$

Svar: $\nabla f(1, 1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $f'_v(1, 1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

3. För $x, y > 0$ gäller att

$$\begin{cases} x = e^{u+v} \\ y = e^{u-v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \ln(xy) \\ v = \frac{1}{2} \ln(\frac{x}{y}) \end{cases}$$

Vi har $u'_x = \frac{1}{2x} = v'_x$ och $u'_y = \frac{1}{2y} = -v'_y$. Kedjeregeln ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = \frac{1}{2x}(z'_u + z'_v)$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = \frac{1}{2y}(z'_u - z'_v)$$

och givet $z \in C^2$ fås

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -\frac{1}{2x^2}(z'_u + z'_v) + \frac{1}{2x}(z''_{uu}u'_x + z''_{uv}v'_x + z''_{vu}u'_x + z''_{vv}v'_x) = \\ &= -\frac{1}{2x^2}(z'_u + z'_v) + \frac{1}{4x^2}(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}) \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} z_{yy} &= -\frac{1}{2y^2}(z'_u - z'_v) + \frac{1}{2y}(z''_{uu}u'_y + z''_{uv}v'_y + z''_{vu}u'_y + z''_{vv}v'_y) = \\ &= -\frac{1}{2y^2}(z'_u - z'_v) + \frac{1}{4y^2}(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}) \end{aligned}$$

Insättning i differentialuttrycket ger

$$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + xz'_x - yz'_y = \dots = z''_{uv}.$$

Svar: z''_{uv}

4. Med koordinater $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta \end{cases}$ fås en C^1 -bijektion

$$D \ni (x, y) \leftrightarrow (r, \theta) \in D' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y^2) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(r \cos \theta + \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta \right) \frac{r}{\sqrt{2}} dr \right) d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^3}{3\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{r^4}{8\sqrt{2}} \sin^2 \theta \right]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \left\{ \sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right\} = \\ &= \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta + \frac{9}{16\sqrt{2}} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{9\pi}{192} + \frac{9}{32} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{9\pi}{192} + \frac{9}{32} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$

5. Observera t ex att

$$\max_K f(x, y, z) = \max_D (x + y^2)^2,$$

där $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Inre stationär punkter till $g(x, y) \equiv (x + y^2)^2$ i D fås ur

$$\begin{cases} 0 = g'_x = 2(x + y^2) \\ 0 = g'_y = 2(x + y^2)2y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y^2.$$

Maxpunkter för $g(x, y)$ på ∂D :

Sätt $h(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1$ (bivillkor).

Nödvändigt villkor $\nabla f \parallel \nabla g$ ger

$$\begin{vmatrix} 2(x + y^2) & 2(x + y^2)2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x + y^2)y(1 - 2x) = 0.$$

Detta ger 6 punkter på ∂D , nämligen $(\pm 1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$.
Vi får

$$\max_D g(x, y) = \max\{g(x, \pm\sqrt{-x}) \text{ för } (x, \pm\sqrt{-x}) \in D, g(\pm 1, 0),$$

$$g(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}), g(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})\} = (\frac{5}{4})^2.$$

Svar: $(\frac{5}{4})^2$

6. Givet vektorfältet $\mathbb{F}(x, y) = (-y, x)$ och kurvan $\gamma : \mathbf{r} = (x, \sin x)$ $1 \leq x \leq 5$.
Detta ger

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot \mathbf{r} = \int_1^5 (-\sin x, x) \cdot (1, \cos x) dx = \dots = 2(\cos 5 - \cos 1) + 5 \sin 5 - \sin 1.$$

Svar: $2(\cos 5 - \cos 1) + 5 \sin 5 - \sin 1$