Matematiska Institutionen
Peter Kumlin

11 april 2005

PM för TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 5p, 2004/2005

Detta och de flesta andra dokument som berör undervisningen i Matematik på M finns på matematiska institutionens websida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/#M.

Föreläsare/Examinator: Peter Kumlin
Telefon: 7723532 (arb)
Tjänsterum: 1334 (Matematiskt centrum)
E-post: kumlin@math.chalmers.se

Övningsledare:

grupp	sal tisdag	sal fredag	övningsledare	e-post
A	ML11	ML2	Marcus Better	marcusb@math.chalmers.se
B	ML12	ML3	Erik Broman	broman@math.chalmers.se
C	ML13	ML4	Anna Nyström	anno@math.chalmers.se
TD	ML14	ML5	Maria Roginskaya	maria@math.chalmers.se

Datorövningar: Datorövningar kommer att anordnas under veckorna 3-6 och examineras av Jacques Huitfeldt, epost jacques@math.chalmers.se, Matematiskt centrum rum 2346. Datorsalarna är bokade enligt följande:

A måndagar 15-17

B tisdagar 8-10

C tisdagar 10-12

D torsdagar 8-10

E torsdagar 10-12

Material till första laborationstillfället delas ut vid onsdagsföreläsningen i vecka 2. Vid datorövningarna kommer delar av det numeriska materialet av kursen att presenteras.

Kurslitteratur: Persson/Böiers: Analys i flera variabler, Studentlitteratur (PB)
Övningar i analys i flera variabler, Lund 2005 (Observera att numreringen är ej densamma i tidigare upplagor)
Huitfeldt: meddelas senare (H)
Pärt-Enander/Sjöberg: Användarhandledning för Matlab 6, Uppsala universitet
Eventuellt kompletterande kursmaterial utdelas i samband med undervisningen och finns på kursens webbsida.

Kursens syfte och mål: Kursens syfte är att tillsammans med övriga matematikkurser, ge en matematisk allmänbildning som är så användbar som möjligt i fortsatta studier och teknisk yrkesverksamhet. Kursen skall på ett logiskt och sammanhängande sätt ge sådana kunskaper i matematisk analys i flera variabler och numerisk analys som är nödvändiga för övriga kurser inom M-programmet. Studenterna skall efter genomgången kurs

- kunna redogöra för innebörden hos den matematiska flervariabelanalysens och den numeriska analysens grundbegrepp
- ha fått förståelse för och kunna redogöra för sambanden mellan de olika begreppen
- kunna kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning
- ha fördjupat sin förmåga att utnyttja programspråket MATLAB för problemlösning

Undervisning: Undervisningen består av föreläsningar, övningslektioner i grupper samt datorövningar. Det är viktigt att man avsätter en hel del tid till hemarbete så att man i största möjliga mån kan utnyttja övningstimmarna till att ställa eventuella frågor till övningsledaren.

Examination: Examinationen består av datorlaborationer och en skriftlig tentamen den 23/5. För att få godkänt på kursen krävs att samtliga datorlaborationer och den skrifliga tentamen är godkända. Datorlaborationerna redovisas på en periodrapport som ska vara inlämnad före den skriftliga tentamen. Slutbetyget baseras på resultatet på den skriftliga tentamen.

Skrivningen kommer bestå av ca 8 uppgifter med maxpoäng 50. Den kommer att innehålla både problemlösning och teorifrågor. Matlabuppgift (modellering/programmering) kan förekomma. **Inga hjälpmedel** (ej heller miniräknare) får användas. Om du upptäcker att du av misstag har otillåtet hjälpmedel med på tentan skall du omedelbart, utan något som helst dröjsmål, kalla på salsvakten och anmäla detta. Tid och plats för tentamen anslås på studieportalen.

För att få godkänt på kursen krävs minst 20 poäng. För betyget 4 krävs 30 poäng och för betyget 5 krävs minst 40 poäng.

Gamla kuserna TMA082A+TMA082B och TMV015+TMV020: För de studenter som läst de gamla kurserna TMV015+TMV020 respektive TMA082A+TMA082B kommer **ingen** skriftlig tentamen att ges vid den 23/5. Nästa omtenteringsmöjlighet för dessaa kurser är under augustiperioden 2005.

Baskurs: Kursen innehåller många begrepp, satser, idéer och metoder för problemlösning. En del av dessa är mycket viktiga i kommande kurser, såväl i matematik som i andra ämnen. För att precisera detta ges nedan en lista över definitioner, satser och problemtyper med hänvisning till kursböckerna. Frasen ”med bevis” innebär att bevismetoden eller bevisidén är viktig. Ett sådant bevis är det extra viktigt att du förstår och kan genomföra utan stöd av boken.

1. Funktioner av flera variabler, PB 1.
   - Gränsvärdesberäkning. 1.24,29.
   - Bevis av gränsvärdesregler.
2. Differentialkalkyl för reellvärda funktioner, PB 2, 5.2.
   - Lösning av partiell differentialekvation med hjälp av koordinatbyte, 2.20, 25, 57.
   - Riktningsderivata och tangentplan, 2.37, 41, 45.
   - Differentierbarhet, definition samt sats 3, $C^1 \Rightarrow$ differentierbar.
   - Motivera definitionen av tangentplan.
   - Kedjeregeln för $f(x(t), y(t))$ med bevis i fallet $n = 2$.
   - Sats 8, ∇f är normal till nivåkurvan/ytan $f = C$ med bevis.
   - Taylors formel (sats 10) med bevis.
   - Lokala extremvärden, 2.66,69 (även a och b).
   - Kort om PDE: Laplace och Poissons ekvationer, numerisk lösning.
3. Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner, PB 3, 5.7.
   - Bestämning av tangent och längd till en kurva.
   - Motivera definitionen av tangentvektorn till en kurva.
   - Bestämning av tangentplan till parametriserad yta, 3.6,7.
   - Beräkning av kurvintegral.
   - Beräkning av funktionalmatris och funktionaldeterminant, 3.13,22.
   - Linjärisering. Numerisk lösning av ickelinjära system.
4. Optimering, PB 4.
   - Formulera Lagranges multiplikatormetod. Bevis i fallet med två variabler och ett bivillkor. Tillämpning av metoden: 4.29,32.
   - Beräkning av största och minsta värde på kompakt mängd: 4.9. Icke kompakt mängd, 4.22.
   - Numerisk optimering: gradientmetoden och Newtons metod.
5. Dubbelintegraler, PB 6.
   - Definition av begreppen trappfunktion, Φ, och dubbelintegralen av Φ över axelparallell rektangel.

- Definition av integralen av en begränsad funktion över en axelparallell rektangel.
- Motivering av formeln för integration över nivåkurvor.
- Tillämpning av formlerna för itererad integration, variabelsubstitution och integration över nivåkurvor, 6.14, 16, 22, 19, 6.31. Generaliserade integraler, 6.34, 35.

6. Trippelintegraler, PB 7.
   - Tillämpning av formlerna för itererad integration, variabelsubstitution och integration över nivåytor. Generaliserade integraler. Ex. 7.3, 5, 6, 7, 14.
7. Derivering under integraltecknet, PB 5.1.
   - Härledning av en formel för derivering av $F(s) = \int_a^{b(s)} f(s,x)\,dx$.
8. Tillämpningar av integraler, PB 8.
   - Volymberäkning, 7.12, 8.2, 6
   - Area av krökt yta given av en parametrisering. Motivering av formeln. Härledning av specialfall: funktionsyta, rotationsyta.
9. Vektoranalys i planet, PB 9.
   - Definition av kurvintegral. Beräkning genom parametrisering.
   - Formulera och bevisa Greens formel. Beräkning av kurvintegral med Greens formel, 9.9, 11.
   - Definition av exakt differentialform, potential. Bestämning av potential.
   - Bevisa att värdet av kurvintegralen av en exakt differentialform är potentialskillnaden mellan kurvans slut- och startpunkt. Beräkning av kurvintegral av exakt differentialform.
   - Bevisa att om $Q'_x = P'_y$ i ett enkelt sammanhängande område Ω så har (P, Q) en potential i Ω.

Observera att jämfört med tidigare års flervariabelkurser har momentet ”Vektoranalys i rummet PB 10” utgått!

Veckoplanering: En preliminär veckoplanering ges nedan. De uppgifter som angetts som typuppgifter kommer att lösas av övningsledarna. Dessa uppgifter är av en svårighetsgrad som kan förekomma på den skriftliga tentamen. I övrigt är det upp till de olika grupperna och övningsledarna att bestämma hur mycket övningsledarna ska räkna och hur mycket självverksamhet som ska förekomma.

Vecka 1:

Funktioner av flera variabler.
Kapitel 1 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.1	Kap.1: 6,7,8,11,16	Kap.1: 20,24ade,27abc,29ac	Kap.1: 25,31a

Typuppgifter:

1. Rita mängderna $M_1 = \{(x,y) : 2 < (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$, $M_2 = \{(x,y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 3\}$, och $M_3 = \{(x,y) : 1 \leq xy \leq 4\}$. Bestäm inre punkter, randpunkter och yttre punkter i $\mathbf{R}^2$ för mängderna (markera gärna de olika delarna med olika färg). Avgör också om mängderna är öppna, slutna eller ingetdera, och om de är kompakta.

2. (a) Undersök funktionerna $f_1(x,y) = xy$, $f_2(x,y) = \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$, $f_3(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, $f_4(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ och $f_5(x,y) = x^3/(x^2-y)$ genom att t.ex. rita funktionsyta och nivåkurvor till respektive funktion i matlab. Avgör om funktionerna har gränsvärden då $(x,y) \to (0,0)$. Kan man se på grafen eller nivåkurvorna om en funktion har eller inte har gränsvärde?

   (b) Avgör vilka av funktionerna som kan utvidgas till hela $\mathbf{R}^2$, så att utvidgningen blir kontinuerlig?

Vecka 2:

Differentialkalkyl för reellvärda funktioner av flera variabler.
Avsnitt 2.1-2.4 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs.2.1-2.4	Kap.2: 1bd,2a,5,11,13,15a,28a,30	Kap.2: 6a,12,20,25,32,37,41,43a	Kap.2: 14,23,49

Typuppgifter:

1. Temperaturen T i ett område i rummet ges av $T(x,y,z) = x^2y - 3z$. Beräkna temperaturens riktningsderivata i punkten $(-1,1,2)$ och riktningen $\mathbf{v} = (1,-2,2)$. I vilken riktning växer temperaturen snabbast och hur stor är riktningsderivatan då ?

2. Bestäm tangentplanet till nivåytan $yze^{xz} + x\ln y = 1$ i punkten $(0,1,1)$. Nära punkten $(0,1,1)$ beskriver nivåytan en funktionsyta på formen $z = f(x,y)$. Bestäm vinkeln mellan vektorn $(1,1,0)$ i $xy-$planet och tangenten till kurvan $(x,y,z) = (t, 1+t, f(t,1+t))$, $t \in \mathbf{R}$, i punkten $(0,1,1)$. Ange funktionsvärdet $f(0.1, 1.1)$ approximativt, genom att beräkna $z-$koordinaten för den punkt i tangentplanet där $x = 0.1$ och $y = 1.1$.

3. Visa att $z(x,y) = x^2yf(3x+y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen,
$$2xy^2z'_x - 3xyz'_y = (4y^2 - 3x)z,$$
där f är en deriverbar funktion av en variabel.

Vecka 3:

Partiella derivator av högre ordning, Taylorutveckling och lokala undersökningar.
Avsnitt 2.5–2.7 och 5.2 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.
Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner.
Kap.3 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs. 2.5–2.7	Kap.2: 50,60ab,64,71a	Kap.2: 51,57,58,66,70,74	Kap.2: 76,90
PB Avs. 5.2		Kap.5: 10	
PB Kap.3	Kap.3: 1,2,3,9a,15a,18,23	Kap.3: 4,5,10a,13,20,22,24,29,35, 39	Kap.3: 36

Typuppgifter:

1. Temperaturen T i en punkt i rummet ges av $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + xy + 2xz - 2yz + x$. Bestäm i vilken/vilka punkt(er) som den maximala temperaturförändringen $|\nabla T(x,y,z)|$ är minimal.
2. Bestäm, för $x > 0$ och $y > 0$, alla lösningar $f(x,y)$ till den partiella differentialekvationen $x^2 f''_{xx} + x = y^2 f''_{yy} + y$, sådana att $f(x,x) = 0$, för alla $x > 0$.

   (Tips: Inför nya variabler $u = xy, v = \dfrac{x}{y}$)
3. Låt f vara samma funktion som i typuppgift 2.2. Beräkna funktionsvärdet $f(0.1, 1.1)$ approximativt genom att Taylorutveckla $f(x,y)$ av andra ordningen, kring punkten $(0,1)$. Ligger funktionsytan $z = f(x,y)$ över eller under tangentplanet i punkten $(0.1.1)$ (eller ingetdera)?

Vecka 4:

Optimering.
Kapitel 4 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.4	Kap.4: 1abc,3,7,16,23	Kap.4: 2,9,11,17,18,22,25,26,28,30	Kap.4: 15,29,37,40,47

Typuppgifter:

1. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.
2. Avgör om funktionen
$$f(x,y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$
har något största och minsta värde i den öppna kvadranten $\{(x,y);\, x > 0,\, y > 0\}$.
3. Bestäm det största värdet av funktionen $f(x,y,z) = z$ på skärningen mellan de båda ytorna
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{och} \quad xy + xz + yz = -1.$$

Vecka 5:

Dubbelintegraler.
Kapitel 6 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.
Multipelintegraler.
Kapitel 7 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs.6.1-6.4	Kap.6: 1,3,10,12,18,20	Kap.6: 5,7,11,14,16,19,22,24	
PB Avs.6.5-6.6	Kap.6: 30,35	Kap.6: 31,34,49	Kap.6: 41,43,45,51,54
PB Kap.7	Kap.7: 1,2,3,8	Kap.7: 5,6,7,12,13,14	Kap.7: 16

Typuppgifter:

1. Beräkna
$$\iint_Q |x^2 - y| \, dxdy,$$
där $Q = \{(x, y);\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$.

2. Beräkna
$$\iint_\Omega x^2 e^{x/y} \, dxdy,$$
där $\Omega = \{(x, y);\ y \le x \le 2y,\ 1 \le xy \le 3\}$.

3. Sätt $A = \{(x, y) : x \ge a > 0\}$. Visa att
$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = ae^{-a^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{a^2 + u^2} \, du.$$
Tips: Använd variablerna u och v där $u^2 + a^2 = x^2 + y^2$ och $y = vx$.

4. En yta har parameterframställningen $(u^2, uv, v^2/2)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 3$. Beräkna ytans area.

5. Beräkna trippelintegralen $\iiint_{|x|+|y|+|z|\le 1} \sqrt{|x| + |y| + |z|} \, dxdydz$ genom
   (a) itererad integration,
   (b) integration m.h.a. nivåytor.

Vecka 6:

Användning av integraler. Derivation av integraler
Kapitel 8 och avsnitt 5.1 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.8	Kap.8: 1,2	Kap.8: 3,4,6,8,16,17,28,35	Kap.8: 9,13,38,41,43
PB Avs.5.1	Kap.5: 1	Kap.5: 4,15	Kap.5: 8

Typuppgifter:

1. Funktionerna f_t definieras av $f_t(x, y) = \frac{\sin(t(x^2+y^2))}{x^2+y^2}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f_t(0, 0) = t$. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \le t^2} f_t(x, y) \, dxdy$ definierad för **alla** reella tal t.

2. Betrakta alla cirklar som går genom origo och har sin medelpunkt på hyperbeln $xy = 1$. Beräkna arean av den del av planet genom vilken ingen av dessa cirklar passerar.

Vecka 7:

Kurvintegraler. Vektoranalys i planet.
Kapitel 9 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.9	Kap.9: 1,3,5,7,9,23,29	Kap.9: 6,8,11,14,17,18,19,24,25,30,38,39	Kap.9: 15,16,21,26,28

Typuppgifter:

1. Betrakta kurvorna γ_1, γ_2 och γ_3 från $(2,0)$ till $(1,1)$, där
   γ_1 består av linjestyckena från $(2,0)$ till $(2,1)$ och från $(2,1)$ till $(1,1)$,
   γ_2 är den del av nivåkurvan $(x-1)^4 + y^4 = 1$ där $x \geq 1, y \geq 0$, och
   γ_3 ges i polära koordinater av $r = 2\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

   Beräkna, med hjälp av definitionen av kurvintegral, de arbeten som kraften $\mathbf{F}(x,y) = (2x, y^2)$ uträttar då en partikel rör sig utefter respektive kurva.

2. Beräkna arbetet då en partikel påverkad av kraftfältet $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, y)$ flyttas längs ellipsbågen $\{(x,y);\ \frac{1}{4}x^2 + (y-1)^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

3. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^3dy - (y^3 + e^x)dx}{(x^2+y^2)^2}$, där γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ genomlöpt ett varv moturs.

4. Ett vektorfält i planet ges av $\mathbf{u}(x,y) = \big(3x^2 + y - x^3 - y^3, x^3 - y^3\big)$.

   (a) Om $\mathbf{u}$ betraktas som ett kraftfält, för vilket område Ω i planet krävs det störst arbete för att flytta en partikel ett varv längs $\partial\Omega$ med området till vänster? (Definitionsmässigt är det arbete som krävs -1 gånger det arbete som kraften uträttar.)

   (b) Om $\mathbf{u}$ betraktas som strömtäthetsfältet för ett flöde, för vilket område Ω i planet är flödet ut ur Ω över randen störst?