Preliminära (kortfattade) lösningar till TMV020, 2004-10-21

1. 1F, 2S, 3F, 4S, 5S, 6S, 7S

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   Egenvärden: $(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

   Egenvektorer: $\boxed{\lambda_1}$ Ansätt $X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. Detta ger $3\alpha + \beta = 2\alpha$ dvs $\alpha + \beta = 0$. Välj t.ex. $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\lambda_2}$ Välj t.ex. $X_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ eftersom egenvektorer svarande mot olika egenvärden är ortogonala då A är symmetrisk.

   Då gäller $A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} S^T$ där $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Observera att $S^{-1} = S^T$ då S är en ortogonalmatris (vilket motiverar att vi normerade vektorerna X_1 och X_2). Alltså

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & -2^n \\ 4^n & 4^n \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^n + 4^n & -2^n + 4^n \\ -2^n + 4^n & 2^n + 4^n \end{bmatrix} = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{bmatrix}$$

   Kontroll: För $n = 1$ gäller $A^1 = A$ (vilket stämmer).

   Svar:

$$2^{n-1} \begin{bmatrix} 2^n + 1 & 2^n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\iint_D x\cos y\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x\cos y\,dx)dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}[\frac{x^2}{2}\cos y]_y^{\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{2}(1-y^2)\cos y - \frac{1}{2}y^2\cos y)dy = [\frac{1}{2}\sin y]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^2\cos y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \{[y^2\sin y]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\sin y\,dy\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \{\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 2\{[y(-\cos y)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos y\,dy\}\} =$$

$$= 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{1}{\sqrt{2}})) = 2\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Alternativ: Integralen kan också beräknas genom att byta till polära koordinater. Då gäller

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\cos(r\sin\theta)r\,d\theta dr.$$

Svar: $2\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}})$

4. Totalmassan:

$$\iiint_K \rho dxdydt = \int_0^2 z(\iint_{D_z} dxdy)dz$$

där $D_z = \{(x,y) : (x-z)^2 + y^2 \leq z\}$ vilket ger $\iint_{D_z} = \pi z$.
Alltså

$$\iiint_K \rho dxdydz = \int_0^2 \pi z^2 dz = \pi\frac{2^3}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Alternativ: Ett variabelbyte som gör att kroppen lättare kan beskrivas är

$$\begin{cases} u = x - z \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

Svar: $\frac{8\pi}{3}$

5. $\mathbb{F}$ potentialfält då rot $\mathbb{F} = \mathbb{0}$ (denna kalkyl måste göras). Alltså $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = 0$ då γ sluten kurva. Observera att man inte behöver räkna ut någon potential till vektorfältet.

Svar: 0

6.

$$\begin{aligned} Y &= \{(x,y,z) : x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 3, z \geq 0\} = \\ &= \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\} \end{aligned}$$

vilket svarar mot en halvsfär med radien 2 och medelpunktn i $(1,0,0)$. $\mathbb{F} = (x, y, x^2 + y^2)$ medför att div $\mathbb{F} = 2$.

Sätt $B = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ med nedåtriktad normal och sätt

$K = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Tillämpa Gauss sats.

$$\iiint_K \text{div } \mathbb{F}\, dxdydz = \frac{4\pi}{3} 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} &\iint_B \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS = -\iint_B (x^2 + y^2) dxdy = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} x = 1 + r\cos\theta & \\ y = r\sin\theta & \end{array}, \frac{d(r,\theta)}{d(r,\theta)} = r, \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} = \\ &= -\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (r^2 + 1 + 2r\cos\theta) r dr) d\theta = \\ &= -2\pi [\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}]_0^2 = -12\pi. \end{aligned}$$

Vi får

$$\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS = \frac{32}{3}\pi - (-12\pi) = \frac{68}{3}\pi.$$

Svar: $\frac{68}{3}\pi$