Preliminära (kortfattade) lösningar till TMV160, 2005-05-23

1. Med omskrivning med hjälp av polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ fås

$$(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2-xy^2}} = e^{\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2-xy^2}} = \{\text{polära koordinater}\} =$$

$$= e^{\frac{\ln(1+r^2)}{r^2+r^3\cos\theta\sin^2\theta}} = \{\text{Taylorutveckling } \ln(1+t) = t + O(t^2), t \to 0\} =$$

$$= e^{\frac{r^2+O(r^4)}{r^2+r^3\cos\theta\sin^2\theta}} = e^{\frac{1+O(r^2)}{1+r\cos\theta\sin^2\theta}} \to e$$

då $r \to 0$ oberoende av θ. Här har utnyttjats att e^t är en kontinuerlig funktion.

Svar: e

2. $f(x,y) = \sin(\frac{x}{y})$ ger $\nabla f(x,y) = (\frac{1}{y}\cos(\frac{x}{y}), -\frac{x}{y^2}\cos(\frac{x}{y}))$ och alltså fås

$$\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\cos 1).$$

Vidare gäller

$$f'_{\mathrm{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}.$$

Svar: $\nabla f(1,1) = (\cos 1, -\cos 1)$, $f'_{\mathrm{v}}(1,1) = \frac{\cos 1}{\sqrt{5}}$

3. För $x, y > 0$ gäller att

$$\begin{cases} x = e^{u+v} \\ y = e^{u-v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}\ln(xy) \\ v = \frac{1}{2}\ln(\frac{x}{y}) \end{cases}$$

Vi har $u'_x = \frac{1}{2x} = v'_x$ och $u'_y = \frac{1}{2y} = -v'_y$. Kedjeregeln ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = \frac{1}{2x}(z'_u + z'_v)$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = \frac{1}{2y}(z'_u - z'_v)$$

och givet $z \in C^2$ fås

$$z_{xx} = -\frac{1}{2x^2}(z'_u + z'_v) + \frac{1}{2x}(z''_{uu}u'_x + z''_{uv}v'_x + z''_{vu}u'_x + z''_{vv}v'_x) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}(z'_u + z'_v) + \frac{1}{4x^2}(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

samt

$$z_{yy} = -\frac{1}{2y^2}(z'_u - z'_v) + \frac{1}{2y}(z''_{uu}u'_y + z''_{uv}v'_y - z''_{vu}u'_y - z''_{vv}v'_y) =$$

$$= -\frac{1}{2y^2}(z'_u - z'_v) + \frac{1}{4y^2}(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

Insättning i differentialuttrycket ger

$$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} + xz'_x - yz'_y = \ldots = z''_{uv}.$$

Svar: z''_{uv}

4. Med koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin\theta \end{cases}$ fås en C^1-bijektion

$$D \ni (x,y) \leftrightarrow (r,\theta) \in D' = \{(r,\theta) : 0 \le r \le \sqrt{3}, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\}.$$

Vi får

$$\int\!\!\int_D (x + y^2)\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\int_0^{\sqrt{3}} (r\cos\theta + \frac{r^2}{2}\sin^2\theta)\frac{r}{\sqrt{2}}\, dr)\, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} [\frac{r^3}{3\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{r^4}{8\sqrt{2}}\sin^2\theta)]_0^{\sqrt{3}}\, d\theta = \{\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\} =$$

$$= [\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta + \frac{9}{16\sqrt{2}}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{9\pi}{192} + \frac{9}{32}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})).$$

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{9\pi}{192} + \frac{9}{32}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}))$

5. Observera t ex att

$$\max_K f(x,y,z) = \max_D (x + y^2)^2,$$

där $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Inre stationär punkter till $g(x,y) \equiv (x + y^2)^2$ i D fås ur

$$\begin{cases} 0 = g'_x = 2(x + y^2) \\ 0 = g'_y = 2(x + y^2)2y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y^2.$$

Maxpunkter för $g(x,y)$ på ∂D:
Sätt $h(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1$ (bivillkor).
Nödvändigt villkor $\nabla h \parallel \nabla g$ ger

$$\begin{vmatrix} 2(x + y^2) & 2(x + y^2)2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x + y^2)y(1 - 2x) = 0.$$

Detta ger 6 punkter på ∂D, nämligen $(\pm 1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})$. Vi får

$$\max_D g(x,y) = \max\{g(x, \pm\sqrt{-x}) \text{ för } (x, \pm\sqrt{-x}) \in D, g(\pm 1, 0),$$

$$g(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}), g(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})\} = (\frac{5}{4})^2.$$

Svar: $(\frac{5}{4})^2$

6. Givet vektorfältet $\mathbb{F}(x,y) = (-y, x)$ och kurvan $\gamma : \mathbb{r} = (x, \sin x)\ 1 \leq \vec{x} \leq 5$. Detta ger

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot \mathbb{r} = \int_1^5 (-\sin x, x) \cdot (1, \cos x)\, dx = \ldots = 2(\cos 5 - \cos 1) + 5\sin 5 - \sin 1.$$

Svar: $2(\cos 5 - \cos 1) + 5\sin 5 - \sin 1$