



8 mars 2006

PM för TMV160 Matematisk analys i flera variabler M, 5p, 2005/2006

Detta och de flesta andra dokument som berör undervisningen i Matematik på M finns på matematiska institutionens websida. För TMV160 se

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv160/0506/>

Föreläsare/Examinator: Peter Kumlin

Telefon: 7723532 (arb)

Tjänsterum: H4027 MV

E-post: kumlin@math.chalmers.se

Övningsledare:

grupp	sal tisdag	sal fredag	övningsledare	e-post
A	ML11	ML11	Henrik Seppänen	henriks@math.chalmers.se
B	ML12	ML12	Milena Anguelova	milena@math.chalmers.se
C	ML13	ML13	Magnus Röding	roding@student.chalmers.se
TD	ML14	ML14	Johan Berglind	johanbe@math.chalmers.se

Datorövningar: Datorövningar kommer att anordnas under veckorna 3-7 och examineras av Jacques Huitfeldt, epost jacques@math.chalmers.se, rum L2125 MV. Datorsalarna är bokade enligt följande:

A tisdagar 8-10

B tisdagar 10-12

C torsdagar 8-10

D torsdagar 10-12

E torsdagar 15-17

För vidare information se

<http://www.math.chalmers.se/~jacques/m1/>

Vid datorövningarna kommer delar av det numeriska materialet av kursen att presenteras.

Kurslitteratur: Persson/Böiers: Analys i flera variabler, Studentlitteratur (PB)

Övningar i analys i flera variabler, Lund 2005 (Observera att numreringen är ej densamma i tidigare upplagor)

Huitfeldt: Numeriska metoder för M,V och Z (kap 8-10) (H)

Eventuellt kompletterande kursmaterial utdelas i samband med undervisningen och kommer att finnas på kursens websida.

Kursens syfte och mål: Kursens syfte är att tillsammans med övriga matematikkurser, ge en matematisk allmänbildning som är så användbar som möjligt i fortsatta studier och teknisk yrkesverksamhet. Kursen skall på ett logiskt och sammanhängande sätt ge sådana kunskaper i matematisk analys i flera variabler och numerisk analys som är nödvändiga för övriga kurser inom M-programmet. Studenterna skall efter genomgången kurs

- kunna redogöra för innebörden hos den matematiska flervariabelanalysens och den numeriska analysens grundbegrepp
- ha fått förståelse för och kunna redogöra för sambanden mellan de olika begreppen
- kunna kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning
- ha fördjupat sin förmåga att utnyttja programspråket MATLAB för problemlösning

Undervisning: Undervisningen består av föreläsningar, övningslektioner i grupper samt datorövningar. Det är viktigt att man avsätter en hel del tid till hemarbete så att man i största möjliga mån kan utnyttja övningstimarna till att ställa eventuella frågor till övningsledaren.

Examination: Examinationen består av datorlaborationer och en skriftlig tentamen den 22/5. För att få godkänt på kursen krävs att samtliga datorlaborationer och den skriftliga tentamen är godkända. Datorlaborationerna redovisas på en periodrapport som ska vara inlämnad före den skriftliga tentamen. Slutbetyget baseras på resultatet på den skriftliga tentamen.

Skrivningen kommer bestå av ca 8 uppgifter med maxpoäng 50. Den kommer att innehålla både problemlösning och teorifrågor. Matlabuppgift (modellering/programmering) kan förekomma. **Inga hjälpmedel** (ej heller miniräknare) får användas. Om du upptäcker att du av misstag har otillåtet hjälpmedel med på tentan skall du omedelbart, utan något som helst dröjsmål, kalla på salsvakten och anmäla detta. Tid och plats för tentamen anslås på studieportalen.

För att få godkänt på kursen krävs minst 20 poäng. För betyget 4 krävs 30 poäng och för betyget 5 krävs minst 40 poäng.

Baskurs: Kursen innehåller många begrepp, satser, idéer och metoder för problemlösning. En del av dessa är mycket viktiga i kommande kurser, såväl i matematik som i andra ämnen. För att precisera detta ges nedan en lista över definitioner, satser och problemtyper med hänvisning till kursböckerna. Frasen "med bevis" innebär att bevismetoden eller bevisiden är viktig. Ett sådant bevis är det extra viktigt att du förstår och kan genomföra utan stöd av boken.

1. Funktioner av flera variabler, PB 1.
 - Gränsvärdesberäkning. 1.24,29.
 - Bevis av gränsvärdesregler.
2. Differentialkalkyl för reellvärda funktioner, PB 2, 5.2.
 - Lösning av partiell differentialekvation med hjälp av koordinatbyte, 2.20, 25, 57.
 - Riktningssderivata och tangentplan, 2.37, 41, 45.
 - Differentierbarhet, definition samt sats 3, $C^1 \Rightarrow$ differentierbar.
 - Motivera definitionen av tangentplan.
 - Kedjeregeln för $f(x(t), y(t))$ med bevis i fallet $n = 2$.
 - Sats 8, ∇f är normal till nivåkurvan/ytan $f = C$ med bevis.
 - Taylors formel (sats 10) med bevis.
 - Lokala extremvärden, 2.66,69 (även a och b).
 - Kort om PDE: Laplace och Poissons ekvationer, numerisk lösning.
3. Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner, PB 3, 5.7.
 - Bestämning av tangent och längd till en kurva.
 - Motivera definitionen av tangentvektorn till en kurva.
 - Bestämning av tangentplan till parametriserad yta, 3.6,7.
 - Beräkning av kurvintegral.
 - Beräkning av funktionalmatris och funktionaldeterminant, 3.13,22.
 - Linjärisering. Numerisk lösning av icke linjära system.
4. Optimering, PB 4.
 - Formulera Lagranges multiplikator metod. Bevis i fallet med två variabler och ett bivillkor. Tillämpning av metoden: 4.29,32.
 - Beräkning av största och minsta värde på kompakt mängd: 4.9. Icke kompakt mängd, 4.22.
 - Numerisk optimering: gradientmetoden och Newtons metod.
5. Dubbelintegraler, PB 6.
 - Definition av begreppen trappfunktion, Φ , och dubbelintegralen av Φ över axelparallell rektangel.
 - Definition av integralen av en begränsad funktion över en axelparallell rektangel.
 - Motivering av formeln för integration över nivåkurvor.
 - Tillämpning av formlerna för itererad integration, variabelsubstitution och integration över nivåkurvor, 6.14, 16, 22, 19, 6.31. Generaliserade integraler, 6.34, 35.

6. Trippelintegraler, PB 7.
 - Tillämpning av formlerna för itererad integration, variabelsubstitution och integration över nivåytor. Generaliserade integraler. Ex. 7.3, 5, 6, 7, 14.
7. Derivering under integraltecknet, PB 5.1.
 - Härledning av en formel för derivering av $F(s) = \int_a^{b(s)} f(s, x) dx$.
8. Tillämpningar av integraler, PB 8.
 - Volymberäkning, 7.12, 8.2, 6
 - Area av krökt yta given av en parametrisering. Motivering av formeln. Härledning av specialfall: funktionsyta, rotationsyta.
9. Vektoranalys i planet, PB 9.
 - Definition av kurvintegral. Beräkning genom parametrisering.
 - Formulera och bevisa Greens formel. Beräkning av kurvintegral med Greens formel, 9.9, 11.
 - Definition av exakt differentialform, potential. Bestämning av potential.
 - Bevisa att värdet av kurvintegralen av en exakt differentialform är potentialskillnaden mellan kurvans slut- och startpunkt. Beräkning av kurvintegral av exakt differentialform.
 - Bevisa att om $Q'_x = P'_y$ i ett enkelt sammanhängande område Ω så har (P, Q) en potential i Ω .

Observera att jämfört med tidigare års flervariabelkurser har momentet ”Vektoranalys i rummet PB 10” utgått!

Veckoplanering: En preliminär veckoplanering ges nedan. De uppgifter som angetts som typuppgifter kommer att lösas av övningsledarna. Dessa uppgifter är av en svårighetsgrad som kan förekomma på den skriftliga tentamen. I övrigt är det upp till de olika grupperna och övningsledarna att bestämma hur mycket övningsledarna ska räkna och hur mycket självverksamhet som ska förekomma.

Vecka 1:

Funktioner av flera variabler.

Kapitel 1 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.1	Kap.1: 6,7,8,11,16	Kap.1: 20,24ade,27abc,29ac	Kap.1: 25,31a

Typuppgifter:

1. Rita mängderna $M_1 = \{(x, y) : 2 < (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$, $M_2 = \{(x, y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 3\}$, och $M_3 = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 4\}$. Bestäm inre punkter, randpunkter och yttre punkter i $\mathbf{R}^2$ för mängderna (markera gärna de olika delarna med olika färg). Avgör också om mängderna är öppna, slutna eller ingetdera, och om de är kompakta.
2. (a) Undersök funktionerna $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = \sin(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$, $f_3(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, $f_4(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$ och $f_5(x, y) = x^3/(x^2 - y)$ genom att t.ex. rita funktionsyta och nivåkurvor till respektive funktion i matlab. Avgör om funktionerna har gränsvärden då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Kan man se på grafen eller nivåkurvorna om en funktion har eller inte har gränsvärde?

- (b) Avgör vilka av funktionerna som kan utvidgas till hela $\mathbf{R}^2$, så att utvidgningen blir kontinuerlig?

Vecka 2:

Differentialkalkyl för reellvärda funktioner av flera variabler.

Avsnitt 2.1-2.4 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs.2.1-2.4	Kap.2: 1bd,2a,5,11,13,15a,28a,30	Kap.2: 6a,12,20,25,32,37,41,43a	Kap.2: 14,23,49

Typuppgifter:

1. Temperaturen T i ett område i rummet ges av $T(x, y, z) = x^2y - 3z$. Beräkna temperaturens riktningsderivata i punkten $(-1, 1, 2)$ och riktningen $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$. I vilken riktning växer temperaturen snabbast och hur stor är riktningsderivatan då ?

2. Visa att $z(x, y) = x^2yf(3x + y^2)$ satisfierar den partiella differentialekvationen,

$$2xy^2z'_x - 3xyz'_y = (4y^2 - 3x)z,$$

där f är en deriverbar funktion av en variabel.

3. Bestäm tangentplanet till nivåytan $zye^{xz} + x \ln y = 1$ i punkten $(0, 1, 1)$. Nära punkten $(0, 1, 1)$ beskriver nivåytan en funktionsyta på formen $z = f(x, y)$. Bestäm vinkeln mellan vektorn $(1, 1, 0)$ i xy -planet och tangenten till kurvan $(x, y, z) = (t, 1 + t, f(t, 1 + t))$, $t \in \mathbf{R}$, i punkten $(0, 1, 1)$. Ange funktionsvärdet $f(0.1, 1.1)$ approximativt, genom att beräkna z -koordinaten för den punkt i tangentplanet där $x = 0.1$ och $y = 1.1$.

Vecka 3:

Partiella derivator av högre ordning, Taylorutveckling och lokala undersökningar.

Avsnitt 2.5–2.7 och 5.2 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner.

Kap.3 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs. 2.5–2.7	Kap.2: 50,60ab,64,71a	Kap.2: 51,57,58,66,70,74	Kap.2: 76,90
PB Avs. 5.2		Kap.5: 10	
PB Kap.3	Kap.3: 1,2,3,9a,15a,18,23	Kap.3: 4,5,10a,13,20,22,24,29,35, 39	Kap.3: 36

Typuppgifter:

1. Temperaturen T i en punkt i rummet ges av $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + xy + 2xz - 2yz + x$. Bestäm i vilken/vilka punkt(er) som den maximala temperaturförändringen $|\nabla T(x, y, z)|$ är minimal.
2. Bestäm, för $x > 0$ och $y > 0$, alla lösningar $f(x, y)$ till den partiella differentialekvationen $x^2 f''_{xx} + x = y^2 f''_{yy} + y$, sådana att $f(x, x) = 0$, för alla $x > 0$.
(Tips: Inför nya variabler $u = xy, v = \frac{x}{y}$)

3. (I mån av tid) Låt f vara samma funktion som i typuppgift 2.2. Beräkna funktionsvärdet $f(0.1, 1.1)$ approximativt genom att Taylorutveckla $f(x, y)$ av andra ordningen, kring punkten $(0, 1)$. Ligger funktionsytan $z = f(x, y)$ över eller under tangentplanet i punkten $(0.1, 1)$ (eller ingetdera)?

Vecka 4:

Optimering.

Kapitel 4 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.4	Kap.4: 1abc,3,7,16,23	Kap.4: 2,9,11,17,18,22,25,26,28,30	Kap.4: 15,29,37,40,47

Typuppgifter:

1. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

2. Avgör om funktionen

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

har något största och minsta värde i den öppna kvadranten $\{(x, y); x > 0, y > 0\}$.

3. Bestäm det största värdet av funktionen $f(x, y, z) = z$ på skärningen mellan de båda ytorna

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{och} \quad xy + xz + yz = -1.$$

Vecka 5:

Dubbelintegraler.

Kapitel 6 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Multipelintegraler.

Kapitel 7 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Avs.6.1-6.4	Kap.6: 1,3,10,12,18,20	Kap.6: 5,7,11,14,16,19,22,24	
PB Avs.6.5-6.6	Kap.6: 30,35	Kap.6: 31,34,49	Kap.6: 41,43,45,51,54
PB Kap.7	Kap.7: 1,2,3,8	Kap.7: 5,6,7,12,13,14	Kap.7: 16

Typuppgifter:

1. Beräkna

$$\iint_Q |x^2 - y| \, dx dy,$$

där $Q = \{(x, y); |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

2. Beräkna

$$\iint_{\Omega} x^2 e^{x/y} \, dx dy,$$

där $\Omega = \{(x, y); y \leq x \leq 2y, 1 \leq xy \leq 3\}$.

3. En yta har parameterframställningen $(u^2, uv, v^2/2)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 3$. Beräkna ytans area.
4. Beräkna trippelintegralen $\iiint_{|x|+|y|+|z|\leq 1} \sqrt{|x|+|y|+|z|} dx dy dz$ genom
- itererad integration,
 - integration m.h.a. nivåytor.

Vecka 6:

Användning av integraler. Derivation av integraler

Kapitel 8 och avsnitt 5.1 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.8	Kap.8: 1,2	Kap.8: 3,4,6,8,16,17,28,35	Kap.8: 9,13,38,41,43
PB Avs.5.1	Kap.5: 1	Kap.5: 4,15	Kap.5: 8

Typuppgifter:

- Funktionerna f_t definieras av $f_t(x, y) = \frac{\sin(t(x^2+y^2))}{x^2+y^2}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f_t(0, 0) = t$.
Bestäm alla stationära punkter till funktionen $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f_t(x, y) dx dy$ definierad för alla reella tal t .
- Betrakta alla cirklar som går genom origo och har sin medelpunkt på hyperbeln $xy = 1$. Beräkna arean av den del av planet genom vilken ingen av dessa cirklar passerar.

Vecka 7:

Kurvintegraler. Vektoranalys i planet.

Kapitel 9 i Persson/Böiers, Analys i flera variabler.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extrauppgifter
PB Kap.9	Kap.9: 1,3,5,7,9,23,29	Kap.9: 6,8,11,14,17,18,19,24,25,30,38,39	Kap.9: 15,16,21,26,28

Typuppgifter:

- Betrakta kurvorna γ_1, γ_2 och γ_3 från $(2, 0)$ till $(1, 1)$, där
 γ_1 består av linjestyckena från $(2, 0)$ till $(2, 1)$ och från $(2, 1)$ till $(1, 1)$,
 γ_2 är den del av nivåkurvan $(x-1)^4 + y^4 = 1$ där $x \geq 1, y \geq 0$, och
 γ_3 ges i polära koordinater av $r = 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.
 Beräkna, med hjälp av definitionen av kurvintegral, de arbeten som kraften $\mathbf{F}(x, y) = (2x, y^2)$ uträttar då en partikel rör sig utefter respektive kurva.
- Beräkna arbetet då en partikel påverkad av kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y)$ flyttas längs ellipsbågen $\{(x, y); \frac{1}{4}x^2 + (y-1)^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \frac{x^3 dy - (y^3 + e^x) dx}{(x^2 + y^2)^2}$, där γ är cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$ genomlöst ett varv moturs.

4. Ett vektorfält i planet ges av $\mathbf{u}(x, y) = (3x^2 + y - x^3 - y^3, x^3 - y^3)$.
- (a) Om $\mathbf{u}$ betraktas som ett kraftfält, för vilket område Ω i planet krävs det störst arbete för att flytta en partikel ett varv längs $\partial\Omega$ med området till vänster? (Definitionsmässigt är det arbete som krävs -1 gånger det arbete som kraften uträttar.)
 - (b) Om $\mathbf{u}$ betraktas som strömtäthetsfältet för ett flöde, för vilket område Ω i planet är flödet ut ur Ω över randen störst?
-