

MATEMATIK CHALMERS

Kurs: Matematisk analys

i flera variabler; TMV160/190

Kursansvarig: Henrik Petersson

## KURSBESKRIVNING

I envariabelanalysen studerade vi funktioner från de reella talen  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$ . *Analys i flera variabler* är studiet av funktioner från  $\mathbb{R}^m$  till  $\mathbb{R}^n$ , där  $n, m \geq 1$ . (Viktigast är då  $n, m \leq 3$ .) När kan sådana typer av funktioner dyka upp i praktiken? Jo, tänk till tex att  $T = T(x, y, z)$  beskriver temperaturen punkten  $(x, y, z)$ , säg i punkten  $(x, y, z)$  i söndagssteken som vi satt in i ugnen.  $T$  är alltså då en funktion från  $\mathbb{R}^3$  till  $\mathbb{R}$ . Vi kan även tänka oss att temperaturen i varje punkt varierar med tiden  $t$ , detta är ju tex fallet med steken (åtminstone till en början), med andra ord så beskrivs temperaturen  $T$  av en funktion  $T(t, x, y, z)$  av fyra variabler. Exempel på när *vektorvärda* funktioner behövs, dvs funktioner där  $n > 1$ , är tex då vi vill beskriva fart eller kraft, ty dessa storheter är vektorer och har därmed tre koordinater.

Värt att nämna är att ni redan har kommit i kontakt med funktioner av flera variabler i tidigare kurser. I envariabelanalyskursen studerade vi bla parametriserade kurvor i planet – dvs funktioner från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}^2$ . I linjära algebran har ni kommit i kontakt med speciella funktioner av flera variabler, nämligen sk linjära funktioner. Ni har tex lärt er att linjära funktioner (avbildningar), säg från  $\mathbb{R}^3$  till  $\mathbb{R}^3$ , kan beskrivas av  $3 \times 3$  matriser på ett entydigt sätt. Vidare har ni lärt er tolka bla ekvationen  $ax + by + cz = d$  ( $a, b, c, d$  givna) – nämligen som ett plan i rummet. Detta är ett exempel på vad vi kommer att kalla *nivåyta*, dvs punktmängden  $(x, y, z)$  som löser ekvationen  $f(x, y, z) = d$  för en given funktion  $f(x, y, z)$  (i vårt fall är alltså  $f(x, y, z) = ax + by + cz$ ) och konstant (nivå)  $d$ . På samma sätt kallas lösningsmängden  $(x, y)$  till ekvationen  $f(x, y) = d$ , där  $f$  är en funktion av två variabler, för en nivåkurva (jmf. ekvationen  $ax + by = d$  beskriver en linje).

Huvudmoment i kursen är *derivering* (centralt inom *optimering*, där för övrigt *Taylors formel* – i flera variabler – har en viktig tillämpning) samt *integrering* av funktioner av flera variabler. När det gäller derivering av funktioner av flera variabler så är den stora skillnaden gentemot envariabelfallet att vi “måste” derivera partiellt. Mer precist, derivata beskriver tillväxthastighet, när vi nu har flera variabler så beror tillväxten på i vilket håll vi rör oss (vi har ju nu flera frihetsgrader). Detta innebär att vi måste derivera med avseende på en riktning i taget – partiell derivata. Integraler (Riemannintegralen) i en variabel byggde vi upp utifrån area – vi ville att integration ska svara mot area i någon mening. När vi nu arbetar med funktioner i flera variabler så bygger vi det hela istället kring volym etc. Volymen av en kropp  $K$  ges exempelvis av *trippelintegralen*  $\iiint_K dx dy dz$  (jmf.  $\int_a^b dx = b - a =$  längden av intervallet  $[a, b]$ ). Om  $K$  har varierande densitet  $\rho(x, y, z)$  så ges massan av kroppen av integralen  $\iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$  över kroppen  $K$ . (Massan hos ett litet volymelement  $dx dy dz$  ges ju av  $\rho(x, y, z) dx dy dz$  i punkten  $(x, y, z)$ , och den totala massan får vi genom en “summering”, dvs integration i tre dimensioner över kroppen  $K$ .) Förutom att utvidga Riemannintegralen till flera variabler så kommer vi att studera en annan typ av integral – *kurvintegraler*.

På nästa sida ges en grovplanering och överblick av *kursinnehållet*:

| <b>Moment</b>                                  | <b>Avsnitt i Boken</b> |
|------------------------------------------------|------------------------|
| Mängder i $\mathbb{R}^n$                       | 10.1, 10.5             |
| Vektorvärda funktioner av en variabel (Kurvor) | 11.1, 11.3–11-5, 12.1  |
| Funktioner av flera variabler                  |                        |
| Gränsvärden och kontinuitet,                   | 12.2–12.4              |
| partiella derivator;                           |                        |
| Kedjeregeln;                                   | 12.5–12.6              |
| Gradient och riktningsderivata;                | 12.7–12.9              |
| Implicit derivata, Taylorutvecklingar;         |                        |
| Optimering                                     | 13.1–13.3              |
| Dubbel- och trippelintegraler;                 | 14.1–14.2, 14.5        |
| Generaliserade integraler                      | 14.3                   |
| Variabelsubstitution                           | 14.4, 14.6             |
| Tillämpningar                                  | 14.7                   |
| Vektorfält                                     | 15.1–15.2              |
| Kurvintegraler                                 | 15.3–15.4              |
| Ytor och Ytintegraler                          | 15.5–15.6              |
| Vektoranalys, Greens sats                      | 16.1–16.3              |
| Repetition                                     |                        |