Matematik Chalmers
Matematisk analys i flera variabler (för M och TD), TMV160/190
Examinator: *Henrik Petersson*

TENTAMEN: 2007-05-28
Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Jonatan Vasilis (0762-721860)

1. Beräkna integralen
$$\iiint_D ze^{x+y}dxdydz,$$
där D är rätblocket $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. (6p)

2. Avgör om följande gränsvärden existerar eller ej:
$$\text{a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2}.$$
(3+3p)

3. Beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (y-x, x)$ och $\mathcal{C}$ är kurvan från punkten $(0,0)$ till $(\pi, 0)$ längs med funktionskurvan $y = \sin^3 x$. (6p)

4. Beräkna volymen V av det område som begränsas av funktionsytorna $z = \sqrt{x^2+y^2}$ samt $z = 2 - x^2 - y^2$. (6p)

5. Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = x^2y - x - y$ på den slutna triangeln med hörnen $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. (6p)

6. Visa att nivåytan $zx^2 + y\sin z = 1$ kring punkten $(x,y,z) = (1,0,1)$ definierar en partiellt deriverbar funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av $(1,0)$. Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,0,f(1,0))$. (6p)

7. Beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (-3yx^4, x^3y^2)$ och $\mathcal{C}$ är kurvan från punkten $(1,0)$ till $(0,1)$ längs med enhetscirkeln $x^2+y^2 = 1$ riktad moturs. (6p)

8. a) Visa att om $f = f(x,y)$ är partiellt deriverbar i en omgivning av punkten (a,b), där (a,b) är en lokal maximipunkt till f, så måste $\nabla f(a,b) = 0$.

   b) Tangentplanet för funktionen $f = f(x,y)$ i punkten $(0,0,f(0,0))$ har ekvationen $z = x+y+1$. Bestäm tangenten för funktionen $g(x) = f(x^2-x, x^3+2x)$ i punkten $(0, g(0))$. (2+6p)

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4:30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Skriv linje samt inskrivningsår på skrivningsomslaget. Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan sidorna.

LÖSNINGSFÖRSLAG
Tentamen 2007-05-28 TMV160/190.

1.
$$\iiint_D ze^{x+y}dxdydz = \int_0^1 zdz \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = \mathbf{(e-1)^2/2}$$

2. a) Gränsvärdet **existerar** ty med polära koordinater ges det av $\lim_{r\to 0} \sin r^2/r^2 = \mathbf{1}$
b) Gränsvärdet **existerar ej** ty vi får olika gränsvärden längs med kurvorna $(t, 0)$ ($t \to 0$; gränsvärdet längs denna kurva blir blir 1) samt (t, t) ($t \to 0$; gränsvärdet längs denna kurva blir 2).

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = (y - x, x)$ är konservativt, en potential ges av $\phi(x, y) = xy - x^2/2$, så $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\pi, 0) - \phi(0, 0) = -\pi/\mathbf{2}$. (alternativt kan integralen beräknas genom integration längs linjen $(x, 0)$, $0 \le x \le \pi$)

4. Vi har att $V = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2-x^2-y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, som med polärt variabelbyte beräknas till
$$V = \int_0^1 2r - r^3 - r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi[r^2 - r^4/4 - r^3/3]_0^1 = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}.$$

5. Stationära punkter i triangeln D ges av $(1, 1/2)$, och $f(1, 1/2) = -1$. Max och min för f på randen ∂D erhålles genom att undersöka max och min för envariabelfunktionerna $f(t, 0)$, $f(0, t)$ samt $f(t, 2-t)$, på intervallet $0 \le t \le 2$. Vi finner att max och min till f är $\mathbf{0}$ (antas i $(0, 0)$) respektive $-\mathbf{2}$ (antas i $(0, 2)$).

6. Vi har att $D_z(zx^2 + y \sin z) = x^2 + y \cos z = 1 \ne 0$ i punkten $(1, 0, 1)$. Enligt implicita funktionsatsen finns det en (entydig) partiellt deriverbar funktion $z = f(x, y)$ så $f(x, y)x^2+y \sin f(x, y) = 1$ i en omgivning av $(1, 0)$. (Speciellt är $f(1, 0) = 1$.) Derivatorna $D_x f(1, 0)$ och $D_y f(1, 0)$, och därmed tangentplanet $z = f(1, 0) + D_x f(1, 0)(x - 1) + D_y f(1, 0)y$, erhålles genom implicit derivering: Vi har tex
$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)x^2 + y \sin f(x, y)) = f'_x x^2 + 2xf + yf'_x \cos(f(x, y)) = f'_x(1, 0) + 2,$$
där vi sista ledet satt in $(x, y) = (1, 0)$, vilket ger att $f'_x(1, 0) = D_x f(1, 0) = -2$. På samma sätt får vi att $D_y f(1, 0) = -\sin 1$. Alltså är tangenplanet $\mathbf{z = 3 - 2x - y \sin 1}$.

7. Vi sluter C med de räta linjestyckena längs koordinataxlarna. Då kurvintegralerna längs dessa linjer är 0, ger Greens Formel: $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D D_x(x^3y^2)-D_y(-3yx^4)dxdy$, där D är delen av enhetscirkeln i första kvadranten. Med polärt variabelbyte i dubbelintegralen, ges således kurvintegralen av (obs att $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$)
$$\iint_D 3x^2(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 3r^5 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = [r^6/2]_0^1 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\mathbf{8}}.$$

8. a) Funktionerna $u(x) = f(x, b)$ samt $v(y) = f(a, y)$ måste ha lokala maximum i punkterna $x = a$ respektive $y = b$. Alltså är $0 = u'(a) = D_x f(a, b)$ samt $0 = v'(b) = D_y f(a, b)$, dvs $\nabla f(a, b) = 0$. b) Eftersom tangentplanet ges av $z = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y$, läser vi av att $f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$. Speciellt är $g(0) = f(0, 0) = 1$. Derivatan $g'(x)$ ges av kedjeregeln:
$$g'(x) = f'_x(x^2 - x, x^3 + 2x)(2x - 1) + f'_y(x^2 - x, x^3 + 2x)(3x^2 + 2).$$
Speciellt är $g'(0) = -f'_x(0, 0) + 2f'_y(0, 0) = 1$, så tangenten till g i punkten $(0, g(0))$ ges av $\mathbf{y = g(0) + g'(0)x = 1 + x}$.