Introduktion till Finita elementmetoden FEM

Detta är en första introduktion till Finita elementmetoden FEM, en metod för att lösa partiella differentialekvationer.

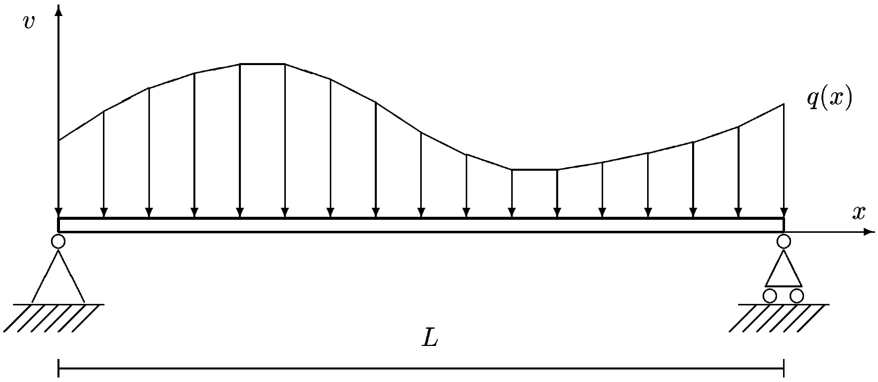
FEM för elliptiska problem i en dimension

Vi är intresserade av följande typ-problem med s.k. Dirichlet-randvillkor

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

där f är en given funktion och u skall bestämmas.

Exempel 1. En rak balk, med variabelt yttröghetsmoment $I(x)$ och elasticitetsmodul E, ligger på två stöd och påverkas av ett tryck $q(x)$.



Moment $M(x)$ och utböjning $v(x)$ uppfyller differentialekvationen

$$\begin{cases} -M''(x) = q(x) \\ -EI(x)\, v''(x) = M(x) \end{cases}$$

med randvillkoren

$$\begin{cases} M(0) = M(L) = 0 \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

Vi vill bestämma $M(x)$ och $v(x)$.

Med finita elementmetoden FEM kommer vi bestämma en approximativ lösning baserad på en uppdelning av intervallet $0 \leq x \leq L$, ett s.k. nät.

Den största delen av beräkningsarbetet kommer då bestå i att lösa följande ekvationssystem för matriser

$$\begin{cases} KM = b \\ Kv = r(M) \end{cases}$$

med metoder från förra läsperioden. Lite längre fram i materialet ser vi på matrisen K och vektorerna b och $r(M)$.

Vi ser att balkens ekvation i exempel 1 består av ett system av två kopplade typ-problem.

Differentialekvation: Bestäm $u \in C^2([0,1])$ så att

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

där

$$C^2([0,1]) = \{v \mid v, \ v' \text{ och } v'' \text{ kontinuerliga på } 0 \leq x \leq 1\}$$

Om vi multiplicerar ekvationen $-u'' = f$ med en funktion v får vi $-u''v = fv$. Integrerar vi sedan över intervallet $0 \leq x \leq 1$ får vi

$$-\int_0^1 u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

För att få ner ordningen på derivatan av u partialintegrerar vi och får

$$-\int_0^1 u''v\,dx = [-u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v'\,dx = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 u'v'\,dx$$

där vi utnyttjade att $v(0) = v(1) = 0$.

Vi har kommit fram till

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx$$

Om vi kräver att detta samband skall uppfyllas för tillräckligt många lämpligat valda funktioner v får vi en s.k. svag formulering eller variationsformulering.

Variationsekvation: Bestäm $u \in V^0$ så att

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V^0 \tag{2}$$

där

$$V^0 = \{v \mid \int_0^1 v^2\,dx < \infty,\ \int_0^1 (v')^2\,dx < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$$

Symbolen $\forall$ betyder "för alla", dvs. $\forall v \in V^0$ betyder "för alla v som tillhör mängden V^0".

Sats: Om u lösning till (1) så är u lösning till (2). Omvänt så gäller: Om u lösning till (2) och dessutom $u \in C^2([0,1])$ så är u lösning till (1).

Bevis: Att en lösning u till (1) också är en lösning till (2) följer av härledningen av variationsekvationen.

Omvänt. Antag u lösning till (2). Då har vi $\int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0,\ \forall v \in V^0$.

Eftersom $u \in C^2([0,1])$ kan vi partialintegrera i första termen och får

$$-\int_0^1 (u'' + f)v\,dx = 0, \quad \forall v \in V^0$$

eftersom $v(0) = v(1) = 0$.

Detta är möjligt endast om $u''(x) + f(x) = 0$ för $0 \leq x \leq 1$, vilket följer nedanstående sats.

Sats: Om $w \in C([0,1])$ och $\int_0^1 wv\,dx = 0,\ \forall v \in V^0$ så gäller att $w(x) = 0$ för $0 \leq x \leq 1$.

Bevis: Antag $w(x_0) \neq 0$. $w \in C([0,1]) \Rightarrow w \neq 0$ i en omgivning Ω_0 av x_0. Tag $v_0 \in V^0$ med $v_0 > 0$ i Ω_0 och $v_0 = 0$ utanför Ω_0. Då gäller $\int_0^1 wv_0\,dx = \int_{\Omega_0} wv_0\,dx \neq 0$. Motsägelse.

Vi skall formulera ett minimeringsproblem som är ekvivalent med variationsekvationen. Av fysikaliska skäl är det naturligt att ha även denna formulering, som vi kommer se i exempel 3.

Inför funktionalen $F : V^0 \mapsto \mathbb{R}$ definierad av

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx$$

Minimeringsproblem: Bestäm $u \in V^0$ så att

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V^0 \tag{3}$$

Sats: Om u lösning till (2) så är u lösning till (3) och omvänt.

Bevis: Antag u lösning till (2). Låt $v \in V^0$ och sätt $w = v - u$ så att $v = u + w$ och $w \in V^0$. Vi har

$$F(v) = F(u+w) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u' + w')^2\,dx - \int_0^1 f(u+w)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2\,dx - \int_0^1 fu\,dx + \int_0^1 u'w'\,dx - \int_0^1 fw\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (w')^2\,dx \;\geq F(u)$$

eftersom $\int_0^1 u'w'\,dx - \int_0^1 fw\,dx = 0$ och $\frac{1}{2}\int_0^1 (w')^2\,dx \;\geq 0$.

Omvänt antag u lösning till (3). Då gäller för ett godtyckligt $v \in V^0$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ att

$$F(u) \leq F(u + \alpha v)$$

eftersom $u + \alpha v \in V^0$.

Låt $g(\alpha) = F(u + \alpha v)$. Nu har g minimum för $\alpha = 0$, varför $g'(0) = 0$. Men

$$g(\alpha) = F(u+\alpha v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2\,dx + \alpha\int_0^1 u'v'\,dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \int_0^1 fu\,dx - \alpha\int_0^1 fv\,dx$$

dvs. $g'(0) = \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 fv\,dx$, varav följer att u lösning till (2).

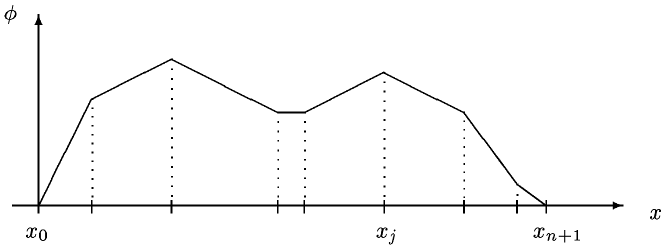
FEM för typ-problemet

Inför ett nät på $0 \leq x \leq 1$: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ och låt $h_j = x_j - x_{j-1}$. Då är $h = \max_j h_j$ ett mått på nätets finhet.

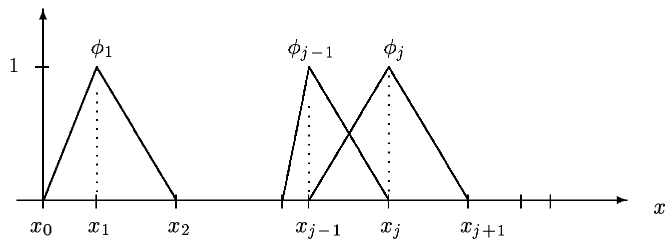
Inför nu rummet

$$V_h^0 = \{\phi \mid \phi \in C([0,1]),\ \phi \text{ linjär på } x_{j-1} < x < x_j,\ \phi(0) = \phi(1) = 0\}$$

Nu gäller $V_h^0 \subset V^0$, dvs. V_h^0 är ett underrum i V^0, vidare är V_h^0 av ändlig dimension och kan beskrivas av nodvärdena $\xi_j = \phi(x_j),\ j = 1, \cdots, n$. Rummets dimension är alltså n.



Som bas för rummet kan vi ta hattfunktionerna $\phi_j \in V_h^0,\ j = 1, \cdots, n$ som karakteriseras av att $\phi_j(x_i) = 1$ om $i = j$ och $\phi_j(x_i) = 0$ om $i \neq j$.



Vi har alltså

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, & x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}, & x_j < x < x_{j+1} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

En funktion $\phi \in V_h^0$ kan skrivas

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi_j(x), \quad \xi_j = \phi(x_j)$$

Finita elementmetoden för modellekvationen (1) formuleras:

Finita elementmetoden: Bestäm $u_h \in V_h^0$ så att

$$\int_0^1 u_h' \phi' \, dx = \int_0^1 f\phi \, dx, \quad \forall \phi \in V_h^0 \tag{4}$$

där

$$V_h^0 = \{\phi \mid \phi \in C([0,1]), \, \phi \text{ linjär på } x_{j-1} < x < x_j, \, \phi(0) = \phi(1) = 0\}$$

Speciellt gäller då att

$$\int_0^1 u_h' \phi_i' \, dx = \int_0^1 f\phi_i \, dx, \quad i = 1, \cdots, n$$

Vi har

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j \phi_j(x), \quad \xi_j = u_h(x_j)$$

och med $f_i = \int_0^1 f\phi_i \, dx$ kan (4) skrivas

$$\sum_{j=1}^n \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx \; \xi_j = f_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

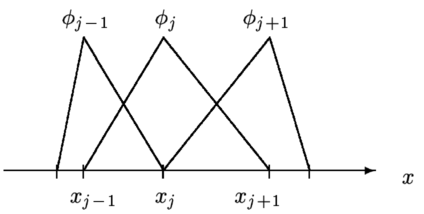
Vilket är ett linjärt ekvationssystem

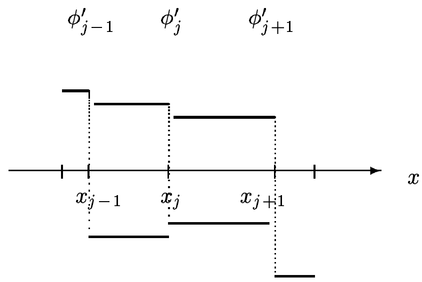
$$K\xi = b$$

där $k_{i,j} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx$ och $b_i = f_i$.

K brukar kallas för **styvhetsmatris** och b för **lastvektor**.

K är **symmetrisk**, eftersom $\int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx = \int_0^1 \phi_j' \phi_i' \, dx$, och **tridiagonal**, eftersom $\int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx = 0$ om $|i - j| > 1$.





K är **positivt definit**, eftersom

$$\xi^T K \xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx \; \xi_j = \int_0^1 (\sum_{i=1}^n \xi_i \phi_i)' (\sum_{j=1}^n \xi_j \phi_j)' \, dx =$$

$$= \int_0^1 \phi' \phi' \, dx = \int_0^1 (\phi')^2 \, dx \geq 0$$

med likhet endast då $\phi' \equiv 0$ på $0 \leq x \leq 1$, dvs. ϕ konstant på $0 \leq x \leq 1$.

Men $\phi(0) = 0$, varav följer att $\phi \equiv 0$, dvs. $\xi_i = 0, i = 1, \cdots, n$. Alltså är $\xi^T K \xi > 0$ för alla $\xi \neq 0$.

Vi bestämmer nu elementen $k_{i,j}$ och b_i. Det gäller att

$$\phi_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_j}, & x_{j-1} < x < x_j \\ -\frac{1}{h_{j+1}}, & x_j < x < x_{j+1} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

så vi får

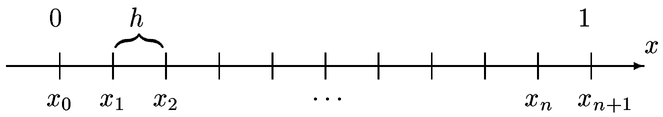
$$k_{i,i} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}^2} \, dx = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$k_{i-1,i} = k_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i' \phi_{i-1}' \, dx = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i^2} \, dx = -\frac{1}{h_i}$$

$$k_{i,j} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx = 0, \text{ då } |i-j| > 1$$

$$b_i = \int_0^1 f \phi_i \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \, dx$$

Tar vi $h_j = h = \frac{1}{n+1}$, dvs. en likformig indelning av intervallet får vi $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$



Styvhetsmatris och lastvektor blir då

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

där

$$b_i = \frac{1}{h} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1}) \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x) \, dx \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{h}{2} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right) = \frac{1}{h} (h^2 f(x_i))$$

Integralen har vi approximerat med trapetsregeln.

Exempel 1 fortsättning. Med finita elementmetoden FEM kommer vi bestämma en approximativ lösning baserad på det införda nätet. Vi skall lösa följande ekvationssystem för matriser

$$\begin{cases} KM = b \\ Kv = r(M) \end{cases}$$

Om vi tar ett likformigt nät får vi

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$b = h^2 \begin{bmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_{n-1}) \\ q(x_n) \end{bmatrix}, \quad r(M) = h^2 \begin{bmatrix} \frac{M_1}{E\,I(x_1)} \\ \frac{M_2}{E\,I(x_2)} \\ \vdots \\ \frac{M_{n-1}}{E\,I(x_{n-1})} \\ \frac{M_n}{E\,I(x_n)} \end{bmatrix}$$

Här blir M_i och v_i approximationer av $M(x_i)$ respektive $v(x_i)$. Vi skall se hur vi kan använda Choleski-faktorisering för att effektivt lösa dessa ekvationer. Vi förutsätter att vi redan definierat värden på **L**, **q**, **E** och **I**

```
>> n=20;
>> e=ones(n,1); h=L/(n+1);
>> A=spdiags([-e 2*e -e],[-1 0 1],n,n);
>> C=chol(A);
>> b=q;
>> M=C\(C'\b);
>> r=h^2*M./(E*I);
>> v=C\(C'\r);
```

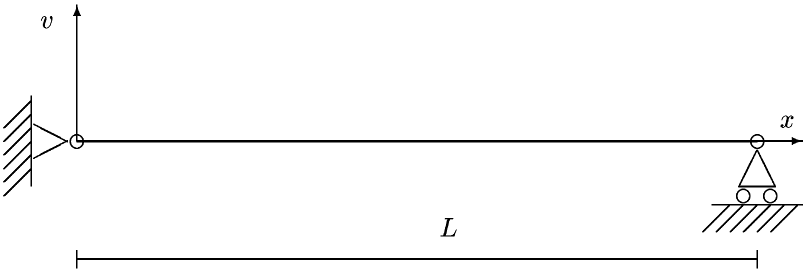
Vi gör först en kolonnvektor **e** fylld med **1**-or. Diagonalerna lagras som kolonnvektorer i matrisen [**-e 2*e -e**], deras respektive placering i förhållande till huvuddiagonalen ges av [**-1 0 1**]. Funktionen **spdiags** lagrar sedan matrisen som en bandmatris. När vi Choleski-faktoriserar känner **Matlab** av att vi har en gles matris och utnyttjar detta för att göra en gles faktorisering.

Nu ytterligare ett exempel från mekaniken.

Exempel 2. Utböjningen v hos en ledlagrad stav av längd L som belastas med lasten P beskrivs av följande egenvärdesproblem för en ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} -EI\,v'' = Pv, \; 0 < x < L \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

där EI är böjstyvheten.



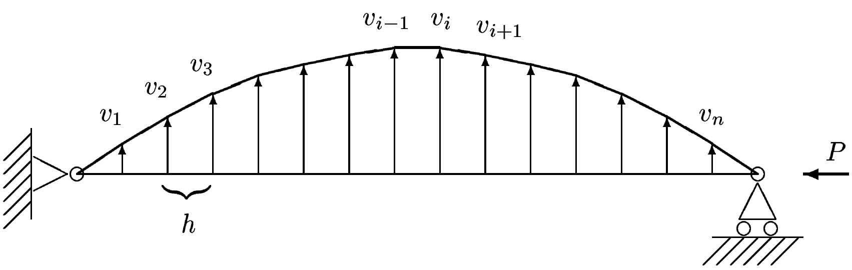
Om vi FEM med ett ekvidistant nät och låter v_i beteckna approximationen av $v(x_i)$ får vi

$$Av = \lambda v$$

där

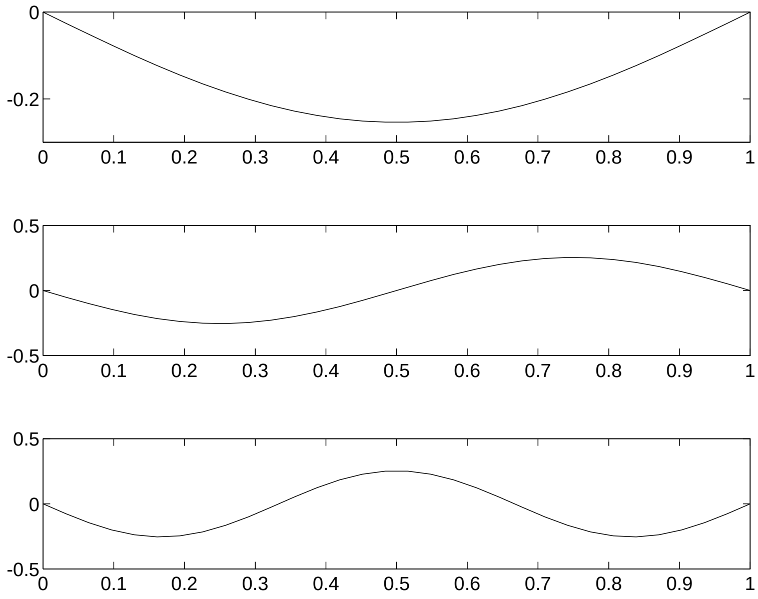
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{och } \lambda = h^2 \frac{P}{EI}$$

dvs. ett egenvärdesproblem för matriser.



Så här kan man göra en **script**-fil i **Matlab** som löser problemet

```
n=40;
L=1; EI=1; h=L/(n+1); e=ones(n,1);
A=spdiags([-e 2*e -e],[-1 0 1],n,n);    % Genererar tridiagonala matrisen.
k=3;                        % Antal egenvärden som skall beräknas.
[V,D]=eigs(A,k,'SM');       % SM = minst belopp. Egenvärden närmast noll beräknas.
D=diag(D);                  % Gör vektor av diagonalen.
[D,index]=sort(D);          % Sorterar vektorn
V=V(:,index);               % och kolonnerna i V i samma ordning.
P=EI/h^2*D;                 % Kritiska lasterna.
V=[zeros(1,k); V; zeros(1,k)];   %  Fyller på randvärden.
x=[0:h:L]';                 % Vektor med x-värden.
subplot(3,1,1), plot(x,V(:,1))   % Ritar första moden osv.
subplot(3,1,2), plot(x,V(:,2))
subplot(3,1,3), plot(x,V(:,3))
```



Neumann randvillkor

Betrakta följande problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1 \\ u'(0) = g,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

med ett Neumann randvillkor vid $x = 0$.

Variationsekvation: Bestäm $u \in V$ så att

$$\int_0^1 u'v'\,dx + gv(0) = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V$$

där

$$V = \{v \mid \int_0^1 v^2\,dx < \infty,\ \int_0^1 (v')^2\,dx < \infty,\ v(1) = 0\}$$

Hur kom vi från differentialekvation till variationsekvation? Partialintegration ger

$$\int_0^1 u''v\,dx = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u'v'\,dx$$

Men eftersom $u'(0) = g$ och $v(1) = 0$ får vi

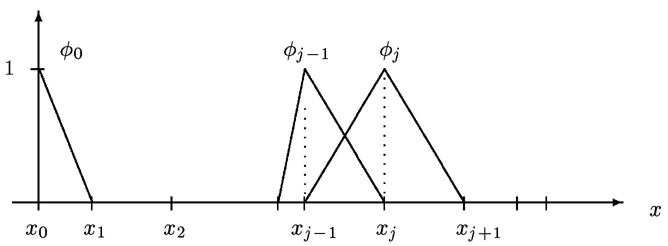
$$\int_0^1 u, v'\,dx + gv(0) = \int_0^1 fv\,dx$$

Neumann randvillkor kallas **naturliga**, de tas om hand av variationsekvationen, medan Dirichlet randvillkor kallas **väsentliga**, dessa måste funktionsrummet ta hand om.

FEM för Neumannproblemet: Inför nu rummet

$$V_h = \{\phi \mid \phi \in C([0,1]), \phi \text{ linjär på } x_{j-1} < x < x_j, \phi(1) = 0\}$$

Som bas för rummet kan vi ta som tidigare $\phi_1, \cdots, \phi_n$ samt ϕ_0 enligt



Vi har alltså

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1}, & x_0 < x < x_1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

En funktion $\phi \in V_h$ kan nu skrivas $\phi(x) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \phi_j(x)$, med $\xi_j = \phi(x_j)$.

Motsvarigheten till (4) blir: Bestäm $u_h \in V_h$ så att

$$\int_0^1 u_h' \phi' \, dx + g\phi(0) = \int_0^1 f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in V_h$$

eller

$$\int_0^1 u_h' \phi_i' \, dx + g\phi_i(0) = \int_0^1 f \phi_i \, dx, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

Eftersom

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \phi_j(x), \quad \xi_j = u_h(x_j)$$

och om vi låter $f_i = \int_0^1 f \phi_i \, dx$, kan ekvationen skrivas

$$\sum_{j=0}^{n} \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx \, \xi_j = f_i - g\phi_i(0), \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

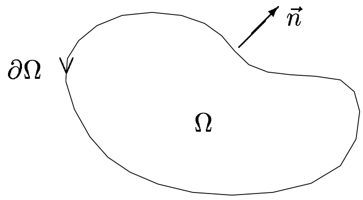
Vi observerar att termen $g\phi_i(0)$ endast kommer med då $i = 0$.

FEM för elliptiska problem i två dimensioner

Som typ-problem tar vi Poissons ekvation med Dirichlet randvillkor

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ x \in \Omega \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

där $f(x)$ är en given funktion och $u(x)$ skall bestämmas. Ω är ett område i planet med randen $\partial\Omega$.



För att komma till variationsekvationen behövs s.k. dubbelintegral och motsvarigheten till partialintegration som ni kommer läsa om lite senare. Motsvarigheten till (2) blir

Variationsekvation: Bestäm $u \in V^0(\Omega)$ så att

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx, \quad \forall v \in V^0(\Omega) \tag{6}$$

där

$$V^0(\Omega) = \left\{ v \mid \int_\Omega v^2 \, dx < \infty, \ \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx < \infty, \ v(x) = 0, \ x \in \Omega \right\}$$

Vi inför också funktionalen $F : V^0(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ definierad av

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega ||\nabla v||^2 \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx$$

och formulerar minimeringsproblemet:

Minimeringsproblem: Bestäm $u \in V^0(\Omega)$ så att

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V^0(\Omega) \tag{7}$$

Man kan visa att (6) $\Leftrightarrow$ (7) och att (5) $\Rightarrow$ (6) samt att (6) $\Rightarrow$ (5), om u tillräckligt reguljär.

Vi ser nu på några andra exempel.

Exempel 3. Minimalyteproblemet (en icke-linjär ekvation)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+||\nabla u||^2}} \nabla u\right) = 0, \ x \in \Omega \\ u = g, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

där $g(x)$ är en given funktion.

Variationsekvation: Bestäm $u \in V = \{v \mid \int_\Omega v^2 \, dx < \infty, \ \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 \, dx < \infty, \ v(x) = g(x), \ x \in \partial\Omega\}$ så att

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u||^2}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad \forall v \in V^0(\Omega)$$

Men den naturligaste formuleringen är som ett minimeringsproblem.

Minimeringsproblem: Bestäm $u \in V$ så att

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V$$

där

$$F(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + ||\nabla v||^2} \, dx$$

Senare kommer ni lära er att detta är ytans area (som vi minimerar).

Exempel 4. Egenvärdesproblemet för Laplace operatorn med Dirichlet randvillkor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \ x \in \Omega \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

där vi söker egenfunktioner $u(x)$ och motsvarande egenvärden λ.

Variationsekvationen blir: Bestäm $\lambda \in \mathbb{R}$ och $u \in V^0(\Omega)$ så att

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega u \, v \, dx, \quad \forall v \in V^0(\Omega)$$

FEM för typ-problemet

Inför en triangulering $\mathcal{T} = \{T_k\}_{k=1}^m$ av området Ω, som vi för enkelhets skull antar är ett polygonområde. Denna triangulering görs så att $T_l \cap T_k = \emptyset$ om $l \neq k$, dvs. så att trianglarna inte överlappar varandra, och så att $\cup_{k=1}^m T_k = \Omega$, dvs. unionen av trianglarna utgör hela området.

Då är $h = \max_{1 \leq k \leq m} d(T_k)$ ett mått på trianguleringens finhet. Med $d(T_k)$ avses diametern av triangeln, dvs. längden av den längsta sidan i triangeln.

Vidare görs trianguleringen så att inget hörn av en triangel hamnar på sidan till en annan triangel. Trianglarnas hörnen möts då i nodpunkterna P_j.

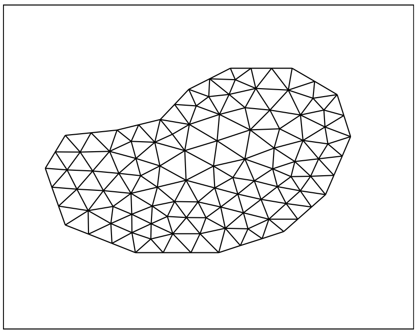
Inför nu rummet

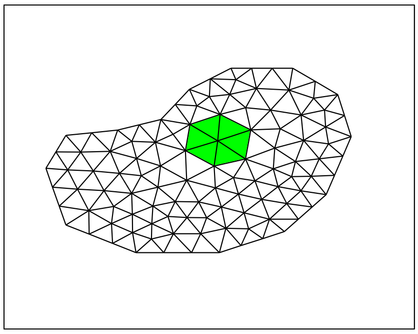
$$V_h^0 = \{\phi \mid \phi \in C(\Omega), \, \phi \text{ linjär på } T_k, k = 1, \cdots, m, \, \phi(x) = 0 \text{ på } \partial\Omega\}$$

Nu gäller $V_h^0 \subset V^0$, vidare är V_h^0 av ändlig dimension och kan beskrivas av nodvärdena $\xi_j = \phi(P_j), \ j = 1, \cdots, n$, där n är antal inre noder. Vi antar att noderna har numrerats så att de på randen räknas upp sist. Rummets dimension är alltså n.

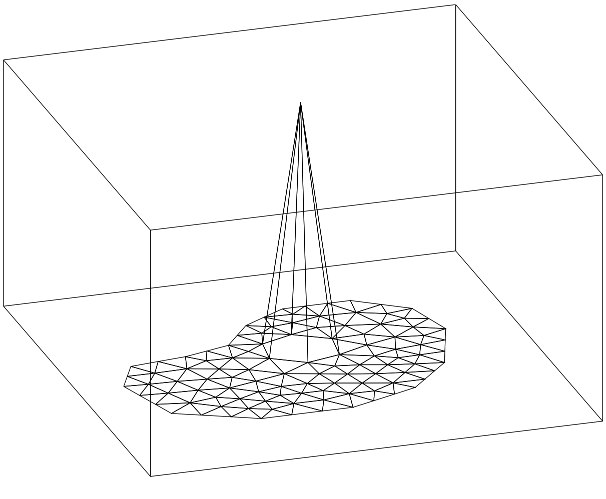
Som bas för rummet kan vi ta hattfunktionerna $\phi_j \in V_h^0, \ j = 1, \cdots, n$ som karakteriseras av att $\phi_j(P_i) = 1$ om $i = j$ och $\phi_j(P_i) = 0$ om $i \neq j$.

Till vänster ser vi en triangulering $\mathcal{T} = \{T_k\}$ av ett område Ω, och till höger har vi valt ut en basfunktion ϕ_j tillhörande nod P_j och skuggat det område där $\phi_j \neq 0$.





Här ser vi basfunktionen ϕ_j lite från sidan.



En funktion $\phi \in V_h^0$ kan skrivas

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi_j(x), \quad \xi_j = \phi(P_j)$$

Finita element metoden för typ-ekvationen (5) formuleras:

Bestäm $u_h \in V_h^0$ så att

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in V_h^0 \tag{8}$$

Speciellt gäller då att

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_\Omega f \phi_i \, dx, \quad i = 1, \cdots, n$$

Vi har

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi_j(x), \quad \xi_j = u_h(P_j)$$

och (8) kan skrivas

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \, \xi_j = \int_\Omega f \phi_i \, dx, \quad i = 1, \cdots, n$$

Vilket är ett linjärt ekvationssystem

$$K\xi = b$$

med styvhetsmatrisen K, där $k_{i,j} = \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$, och lastvektorn b, där $b_i = \int_\Omega f \phi_i \, dx$.

Man kan visa att K är symmetrisk, gles och positivt definit.

FEM för de andra problemen

För exempel 3 får vi att approximationen $u_h(x)$ kan skrivas

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi_j(x) + \sum_{j=n+1}^{q} g(P_j) \phi_j(x)$$

där $P_j, j = n+1, \cdots, q$, är randnoderna med tillhörande basfunktioner $\phi_j(x), j = n+1, \cdots, q$.

Motsvarigheten till variationsekvationen i (8) blir

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u_h||^2}} \nabla u_h \cdot \nabla \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in V_h^0$$

eller

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u_h||^2}} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

Detta ekvationssystemet är ickelinjärt, eftersom integranden inte är linjär i de obekanta $\xi_j, j = 1, \cdots, n$. Man får använda en Newton liknande metod (mer om detta senare i kursen), men man kan utnyttja att derivatamatrisen är gles.

För egenvärdesproblemet i exempel 4 blir variationsekvationen i (8):

Bestäm $u_h \in V_h^0$ så att

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega u_h \phi \, dx, \quad \forall \phi \in V_h^0$$

Speciellt gäller då att

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx = \lambda \int_\Omega u_h \phi_i \, dx \,, \quad i = 1, \cdots, n$$

och med $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \phi_j(x)$, $\xi_j = u_h(P_j)$ får vi

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \, \xi_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \phi_i \phi_j \, dx \, \xi_j, \quad i = 1, \cdots, n$$

Vilket är ett algebraiskt egenvärdesproblem

$$K\xi = \lambda M \xi$$

med styvhetsmatrisen K, där $k_{i,j} = \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$, och **massmatrisen** M, där $m_{i,j} = \int_\Omega \phi_i \phi_j \, dx$.

K och M är symmetriska, glesa och positivt definita.