LÖSNINGSFÖRSLAG
Tentamen 2007-08-31 TMV160/190.

1. Kedjeregeln ger att $\nabla u = (u'_x, u'_y)$ ges av

$$\nabla u = (f'_1(x-y, x^2-y^2)+2xf'_2(x-y, x^2-y^2), -f'_1(x-y, x^2-y^2)-2yf'_2(x-y, x^2-y^2)).$$

Insättning av $x = y = 1$ och det faktum att $f'_1(0,0) = f'_2(0,0) = 1$, ger att $\mathbf{\nabla u(1,1) = (3,-3)}$.

2. Massan M ges av $2\iint_D z dx dy dz$, där D är den del av enhetsklotet med positiva z. Med sfäriskt variabelbyte ges massan därmed av:

$$M = 2\iiint_{D'} \rho\cos\phi\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta,$$

där $D' : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \phi \le \pi/2, 0 \le \theta \le 2\pi$. Alltså (obs $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$)

$$M = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin 2\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \mathbf{\frac{\pi}{2}}.$$

3. Stationära punkter ges av $(0,0)$ samt $(1/6, 1/12)$. Undersökning av andraderivatan, dvs undersökning av $B^2 - AC$ där $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$ i de olika punkterna, ger oss att $\mathbf{(0,0)}$ = **sadelpunkt** och $\mathbf{(1/6, 1/12)}$ = **lokal minimipunkt.**

4. Funktionsytans skäring med xy-planet ges av $2e^{-x^2-y^2} - 1 = 0$, dvs av cirkeln: $x^2 + y^2 = \ln 2$. Med $D : x^2 + y^2 \le \ln 2$ ges således volymen av

$$V = \iint_D (2e^{-x^2-y^2} - 1) dx dy = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} (2re^{-r^2} - r) dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$
$$2\pi[-e^{-r^2} - r^2/2]_0^{\sqrt{\ln 2}} = \pi(\mathbf{1 - \ln 2}).$$

5. Stationära punkter (i ellipsskivan) är punkterna på linjen $y = x$. Max och min på randen $(2x^2 + y^2 = 3)$ finns att söka där $\nabla f = \lambda\nabla(2x^2 + y^2)$ för något λ. Vi får ekvationerna $2x - 2y = 4\lambda x$ samt $2y - 2x = 2\lambda y$, vilket ger oss lösningarna $(x,y) = \pm(1,1), \pm(1/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Insättning och jämförelse av värden ger oss att **max** $= \mathbf{9/2}$ och **min** $= \mathbf{0}$ (notera att $f = 0$ i varje stationär punkt).

6. Greens formel ger att $-\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (D_x(x^2y^2) + D_y(2yx^3)) dx dy$, där D är delen av enhetscirkeln i andra kvadranten. (Vi sluter $-C$ med kurvor längs koordinataxlarna, kurvintegralerna längs dessa ger inget bidrag.) Den sökta kurvintegralen beräknas nu till (polärt variabelbyte):

$$-\iint 2x(x^2 + y^2) dx dy = -\int_0^1 2r^4 dr \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta d\theta = -[2r^5/5]_0^1 [\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \mathbf{2/5}.$$

7. Vi ska ha att $D_x(x^nV) = D_y(x^nU)$. Derivering ger $D_x(x^nV) = D_x(3x^{n+1}(x+y^2)) = 3(n+1)x^n(x+y^2) + 3x^{n+1}$ medans $D_y(x^nU) = x^nD_yU = -6y^2x^n - 3x^{n+1}$. Jämför vi koefficienterna framför x^ny^2 ser vi att vi måste ha $\mathbf{n = -3}$, och detta n ger verkligen sedan likhet. Alltså är $(U/x^3, V/x^3) = (1 - 2y^3/x^3 - 3y/x^2, 3/x + 3y^2/x^2)$ konservativt (i tex det enkelt sammanhängande området: $(x,y) : x > 0$). En potential ϕ ges av $\phi = \mathbf{x + 3y/x + y^3/x^2}$.

8. a) Med $\mathbf{u} = (u, v)$ och $\mathbf{r}(t) = (a + ut, b + vt)$ har vi, enligt definitionen av riktningsderivata, $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = Df(\mathbf{r}(t))(0)$. Kedjeregeln ger oss $Df(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \circ \mathbf{r}'(t)$, vilket är precis $\nabla f(a, b) \circ \mathbf{u}$ då $t = 0$.

b) Grafen till f då $D_{\mathbf{u}}f = 0$, beskrivs av att f är konstant längs varje linje med riktingsvektor $\mathbf{u} = (a, b)$, dvs på linjerna $bx - ay = c$ där c är konstanter. Vi har att $D_{\mathbf{u}}f = 0$ är ekvivalent med att $af'_x + bf'_y = 0$ (enligt a)). Med föreslagna variabelbyte har vi $f'_x = af'_u + bf'_v$ samt $f'_y = bf'_u - af'_v$, så $af'_x + bf'_y = 0$ kan skrivas $(a^2 + b^2)f'_u = 0$, dvs $f'_u = 0$ (ty $a^2 + b^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1 \neq 0$). Alltså måste f vara på formen $\mathbf{f} = \mathbf{h}(\mathbf{v}) = \mathbf{h}(\mathbf{bx} - \mathbf{ay})$ för någon funktion h i en variabel (notera att f är konstant längs linjerna $bx - ay = c$, c konstant).