15/1-2008.

Matematisk analys i flera variabler M och Td

1) $f = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$. Stationära punkter: $\nabla f = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ \frac{-x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8y \\ -x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y^4 = 8y$$

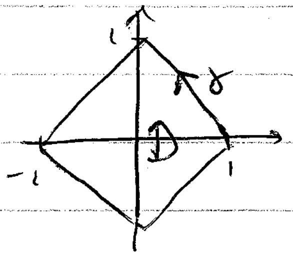
$(x \neq 0, y \neq 0$, ty f ej def. i $(0,0))$, alltså $y = 2 \Rightarrow x = -4$.

$f''_{xx}(-4,2) = -\frac{1}{4}$, $f''_{xy}(-4,2) = -\frac{1}{4}$, $f''_{yy}(-4,2) = -1$.

$Q = -\frac{h^2}{4} - \frac{2h \cdot k}{4} - 1 \cdot k^2 = -\frac{1}{4}\left((h+k)^2 + 3k^2\right) < 0$ då $(h,k) \neq (0,0)$.

Q är neg. definit. $(-4,2)$ är lokalt max.

2) Kurvan γ är randen till en kvadrat:



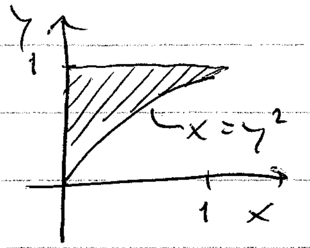
γ är sluten, vi kan tillämpa Greens formel

$$\int_\gamma 3x^2 \arctan y \, dx + \left(\frac{x^3}{1+y^2} + 2x\right) dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{3x^2}{1+y^2} + 2\right) - \frac{3x^2}{1+y^2} \, dxdy = \iint_D 2 \, dxdy =$$

$$= 2 \cdot \text{arean}(D) = 4.$$

3)



$$\iint_E e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[y e^{x/y} \right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 (y e^y - y)\,dy = \left[y e^y \right]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 e^y\,dy - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = e - (e-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4) $f(x,y,z) = xy\sqrt{z}$ målfunktion. $x,y,z \geq 0$.

$g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$ bivillkor.

Eftersom $x,y,z \geq 0$ så $f \geq 0$. Vi ser direkt att minsta värde är 0, ty tag t.ex. $x=0, y=0, z=1$.

För största värde använder vi Lagrange mult. metod: $\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow$

$$\left(y\sqrt{z}, x\sqrt{z}, \frac{xy}{2\sqrt{z}} \right) = \lambda(1,1,1) \Rightarrow x = y \text{ och } z = \frac{x}{2} = \frac{y}{2}.$$

Insatt i bivillkor ger $x + x + \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5} = y$ och $z = \frac{1}{5}$.

$f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{125}$ som är största värde för f under bivillkoret $g=0$.

5) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2}$. Vi undersöker f längs

kurvorna $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$, $t \to 0$ och $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$, $t \to 0$.

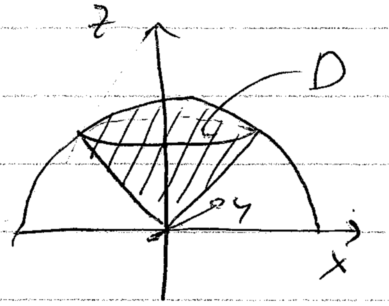
I första fallet har vi $f(0,t) = \dfrac{0}{t^4} = 0$,

alltså $f(0,t) \to \underline{0}$ då $t \to 0$.

I fall 2 har vi $f(t,t^2) = \dfrac{t^4 \cdot t^4}{(t^4+t^4)^2} = \dfrac{t^8}{4t^8} = \dfrac{1}{4}$,

alltså $f(t,t^2) \to \underline{\dfrac{1}{4}}$ då $t \to 0$. Gränsvärde saknas.

6)



Inför sfäriska koordinater.

$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

D ges av $\begin{cases} 0 < r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Vi har alltså

$$\iiint_D x^2 z \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \; r\cos\theta \; r^2\sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 r^5\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\,\frac{(1/\sqrt{2})^4}{4} = \frac{\pi}{96}.$$

7) a) $xz'_x + yz'_y = 2, \quad x > 0$

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u 2x + z'_v \frac{2x}{y^2}$$

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u \cdot 0 + z'_v \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)$$

Alltså $xz'_x + yz'_y = z'_u 2x^2 + z'_v \frac{2x^2}{y^2} + \left(-\frac{2x^2}{y^2}\right) z'_v = z'_u 2x^2 =$

$$= z'_u 2u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ekvationen}}}{=} 2$$

Ekvationen har alltså transformerats till $u \cdot z'_u = 1$,

som har lösningen $z = \ln u + g(v) =$

$$= \ln x^2 + g\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = 2 \cdot \ln x + g\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$$

b) $z(x, x^2) = 0 \Rightarrow z(x, x^2) = 2\ln x + g\left(\frac{x^2}{x^4}\right) = 0$

$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln x^2 = \ln \frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow g(t) = \ln t$, alltså $z = 2\ln x + \ln\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$