Appendix A - Interpolation.

Låt f vara en skalär funktion i en variabel, dvs. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Antag att vi har $n+1$ olika punkter $x_0, x_1, \cdots, x_n$ med motsvarande funktionsvärden $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, och vill bestämma en lämplig funktion P som interpolerar dessa värden, dvs. som uppfyller

$$P(x_i) = f_i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

Vanligt är att använda ett polynom av grad n eller styckvisa polynom, s.k. spline-interpolation.

Polynominterpolation.

Interpolationspolynomet P_n av grad n är entydigt bestämt, men man kan ansätta polynomet på olika sätt. En ofta praktisk ansats är Newtons ansats

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Interpolationskraven $P_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \cdots, n$ ger

$$\begin{gathered} P_n(x_0) = c_0 = f_0, \\ P_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f_1, \\ \vdots \\ P_n(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots \\ + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) = f_n. \end{gathered}$$

Detta är ett nedåt triangulärt linjärt ekvationssystem med koefficienterna $c_0, c_1, \cdots, c_n$ som obekanta. Man löser lätt detta system genom framåtsubstitution.

En annan ansats är Lagranges ansats

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Vi observerar att $l_i(x_j) = 1$, om $i = j$, annars 0. För $n = 1$ får vi

$$P_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

och för $n = 2$ får vi

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Nu skall vi se hur väl $f(x)$ approximeras av $P_n(x)$.

> Om $f(x)$ har $n+1$ kontinuerliga derivator så gäller för interpolationsfelet;
>
> $$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$
>
> med $\xi(x)$ någonstans mellan $x_0, x_1, \cdots, x_n$ och x.

Förklaring: Låt $e(x) = f(x) - P_n(x)$ och $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ och bilda $w(t) = e(x)g(t) - e(t)g(x)$.

Då gäller $w(x) = 0$ och $w(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n$ eftersom $g(x_i) = e(x_i) = 0$.
Alltså har w de $n+2$ nollställena $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ och upprepad användning av Rolles sats ger att $w^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$ för något $\xi(x)$ mellan $x_0, x_1, \cdots, x_n$ och x.

Nu har vi $w^{(n+1)}(t) = e(x)g^{(n+1)}(t) - e^{(n+1)}(t)g(x)$, men $e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ och $g^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ för alla t så

$$0 = w^{(n+1)}(\xi(x)) = e(x)g^{(n+1)}(\xi(x)) - e^{(n+1)}(\xi(x))g(x) =$$

$$= (n+1)!e(x) - f^{(n+1)}(\xi(x))g(x)$$

och resultatet följer. ∎

Interpolation av vissa funktioner med polynom av högt gradtal kan uppföra sig illa. Felet kan bli mycket stort vilket man kan se om man interpolerar funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

på intervallet $-1 \leq x \leq 1$, med polynom av högt gradtal och ekvidistanta interpolationspunkter. I figuren nedan ser vi resultatet för $n = 3, 4, 5, 8$, ökar man gradtalet så blir resultatet bara ännu sämre. Det som inträffar brukar kallas Runges fenomen.