

FEM2 öningar

1. a) Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2, inflöde med tätheten 5 vid $y=0$, och temperaturen 10 på övriga sidor.

b) Skriv ned den svaga formen av detta randvärdesproblem.

2. Som uppgift 1 men med värmeledningskoefficienten $1+xy$, inga värmekällor, omgivande temperaturen 10 överallt, ytskiktets värmeöverföringskoefficient 0 för $x=0$, 5 för $x=1$ och ∞ för $y=0$ och $y=1$.

3. a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för en triangel T med hörnen $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$.

b) Beräkna motsvarande styhetsmatris $a_{ij} = \iint_T \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \, dy$.

4. Skriv ned svaga formuleringen till

$$a) \begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{i } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ D_{\hat{n}} u = g & \text{på } S_2 \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ och $S = S_1 \cup S_2$ (ej överlappande).

Svar.

$$1 a) \begin{cases} -3 \Delta u = 2 & \text{för } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 10 \\ -3 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 5 \end{cases}$$

$$\text{där } \Delta u = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} u$$

b) Finn u sådan att $u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 10$
och

$$3 \int_0^1 \int_0^1 \bar{\nabla} u(x, y) \cdot \bar{\nabla} v(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^1 v(x, y) dx dy + \\ + 5 \int_0^1 v(x, 0) dx$$

för alla v med $v(x, 1) = v(0, y) = v(1, y) = 0$.

$$2 a) \begin{cases} -\bar{\nabla} \cdot ((1+xy) \bar{\nabla} u) = 0 & \text{för } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 10 \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \\ (1+y) \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) + 5(u(1, y) - 10) = 0 \end{cases}$$

b) Finn u sådan att $u(x, 0) = u(x, 1) = 10$ och

$$\int_0^1 \int_0^1 (1+xy) \bar{\nabla} u(x, y) \cdot \bar{\nabla} v(x, y) dx dy + 5 \int_0^1 u(1, y) v(1, y) dy = \\ = 50 \int_0^1 v(1, y) dy \quad \text{för alla } v \text{ med } v(x, 0) = v(x, 1) = 0.$$

$$3. a) \phi_1(x, y) = 1 - x - y$$

$$\phi_2(x, y) = x$$

$$\phi_3(x, y) = y$$

$$b) \bar{\nabla} \phi_1(x, y) = -\bar{i} - \bar{j}$$

$$\bar{\nabla} \phi_2(x, y) = \bar{i}$$

$$\bar{\nabla} \phi_3(x, y) = \bar{j}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4. a) Finn u med $u = u_A$ på S och

$$\iiint_D (a \bar{\nabla} u \cdot \bar{\nabla} v + c u v) dV = \iiint_D f v dV$$

för alla v med $v = 0$ på S .

b) Finn u med $u = u_A$ på S_1 och

$$\iiint_D \bar{\nabla} u \cdot \bar{\nabla} v dV = \iint_{S_2} g v dS$$

för alla v med $v = 0$ på S_1 .