TMV160 FÖ 1.1 2007-08

Flervariabelanalys

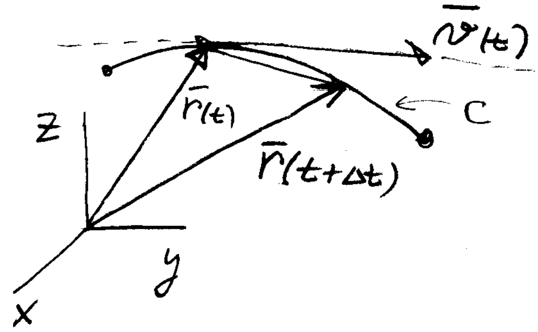
- funktion av flera variabler:
  $$f(\bar{r}) = f(x,y,z)$$
  $$f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$$
- vektorvärd funktion:
  $$\bar{f}(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t)) = f_x(t)\bar{i} + f_y(t)\bar{j} + f_z(t)\bar{k}$$
  $\bar{f}(\bar{r})$ eller $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m))$
- partiell derivata: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$
- multipel integral: $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- vektorfält, div, grad, curl
- partiell differentialekvation (PDE)
  randvärdesproblem, finita element-metoden
- datorövningar, pde toolbox (3 bonuspoäng)

1.1 Vektorfunktion av en variabel

Geometrisk tolkning: $\bar{r}(t)$ är läget av en partikel vid tiden t.

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}$$

Vi antar att $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ är kontinuerliga så att partikeln rör sig längs en kontinuerlig kurva C.



Medelhastighet: $\dfrac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$

Hastighet:

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt}\bar{r}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = \bar{r}'(t)$$

Fart (speed): $v(t) = |\bar{v}(t)|$

Obs:

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\bar{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\bar{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\bar{k} \right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\,\bar{i} + \frac{dy}{dt}\,\bar{j} + \frac{dz}{dt}\,\bar{k}$$

Figuren ger: $\bar{v}(t)$ är tangentvektor till kurvan C i punkten $\bar{r}(t)$.

Acceleration: $\bar{a}(t) = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\bar{r}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{\bar{r}}(t)$

Exempel (cirkel)

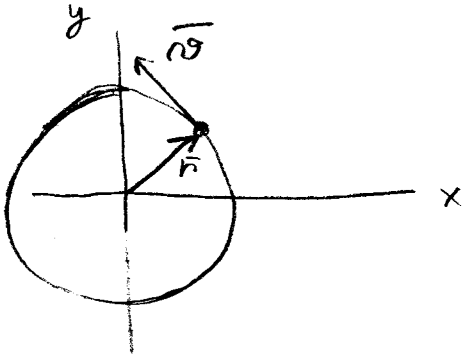
$\bar{r} = a\cos(\omega t)\bar{i} + a\sin(\omega t)\bar{j}$ $\quad (a > 0,\ \omega > 0)$

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad x^2+y^2 = a^2\cos^2(\omega t) + a^2\sin^2(\omega t) = a^2$$

$\bar{v} = -a\omega\sin(t)\,\bar{i} + a\omega\cos(t)\,\bar{j}$

$v = |\bar{v}| = \sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2 + (a\omega\cos(\omega t))^2} = \omega a$

$\bar{a} = -a\omega^2\cos(\omega t)\,\bar{i} - a\omega^2\sin(\omega t)\,\bar{j} = -\omega^2\bar{r}$

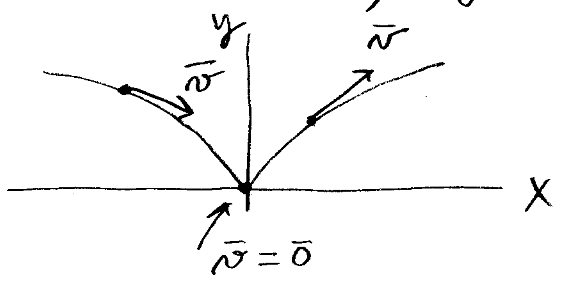


Exempel (spets)

$\bar{r} = t^3\,\bar{i} + t^2\,\bar{j}$

$\bar{v} = 3t^2\,\bar{i} + 2t\,\bar{j}$

Eliminera t: $\quad t = x^{1/3}, \quad y = x^{2/3}$



Sats 1 (Derivering av kombinationer)

Om $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$, $\lambda(t)$ är deriverbara, så är $\bar{u}+\bar{v}$, λu, $u \cdot v$, $\bar{u} \times \bar{v}$, $u \circ \lambda$ deriverbara och

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t)+\bar{v}(t)\right) = \bar{u}'(t) + \bar{v}'(t)$$

(b) $$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\,\bar{u}(t)\right) = \lambda'(t)\,\bar{u}(t) + \lambda(t)\,u'(t)$$

(c) $$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t)\cdot\bar{v}(t)\right) = \bar{u}'(t)\cdot\bar{v}(t) + \bar{u}(t)\cdot\bar{v}'(t)$$

(d) $$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t)\times\bar{v}(t)\right) = \bar{u}'\times\bar{v}(t) + \bar{u}(t)\times\bar{v}'(t)$$

(e) $$\frac{d}{dt}\,\bar{u}(\lambda(t)) = \lambda'(t)\,\bar{u}'(\lambda(t))$$

(f) $$\frac{d}{dt}\,|u(t)| = \frac{\bar{u}(t)\cdot\bar{u}'(t)}{|u(t)|} \quad \text{om } \bar{u}(t) \neq \bar{0}$$

Bevis: Skriv på komponentform och derivera med de gamla deriveringsreglerna.

T.ex. (e): $$\frac{d}{dt}\left(u_x(\lambda(t))\,\bar{i} + u_y(\lambda(t))\,\bar{j} + u_z(\lambda(t))\,\bar{k}\right)$$
$$= \left(u_x'(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,\bar{i} + u_y'(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,\bar{j} + u_z'(\lambda(t))\,\lambda'(t)\,\bar{k}\right)$$
$$= \lambda'(t)\,\bar{u}'(\lambda(t)).$$

Obs även från (c): $$\frac{d}{dt}|\bar{u}|^2 = \frac{d}{dt}\,\bar{u}\cdot\bar{u} = \bar{u}'\cdot\bar{u} + \bar{u}\cdot\bar{u}' = 2\,\bar{u}\cdot\bar{u}'$$

11.3 Parametrisering av kurva.

Vad är en kurva i rummet?

En kurva i rummet är en punktmängd

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}, \quad a \le t \le b$$

$t=a$ $t=b$

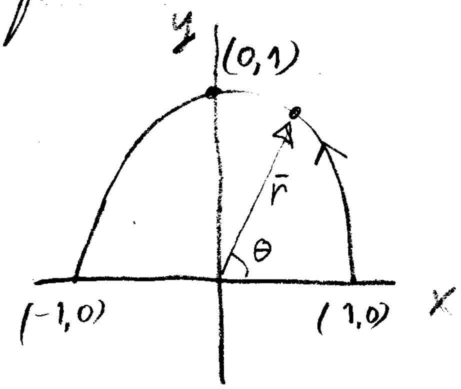
där koordinatfunktionerna är kontinuerliga.

Vi antar dessutom att $\bar{r}$ har kontinuerlig derivata $\frac{d\bar{r}}{dt}$, annars kan kurvan vara patologisk (sjuk), t. ex., passera genom varenda punkt i en volym.

Kurvan är slät (smooth) utom möjligen där $\bar{r}'(t) = \bar{0}$.

En kurvan kan parametriseras på många sätt.

ex. halvcirkeln



a) $t = \theta$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

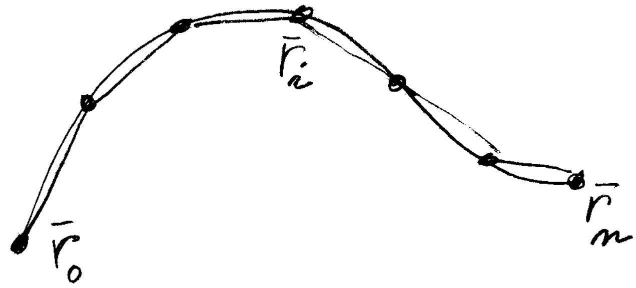
$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin(t)\,\bar{i} + \cos(t)\,\bar{j}$$

b) $s = 1 - x$

$$\begin{cases} x = 1 - s \\ y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-s^2} \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le s \le 1,$$

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = -\bar{i} + \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,\bar{j}$$

Båglängd (arc length)



$\bar r = \bar r(t)$, $a \le t \le b$

Nät:

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$

$\bar r_i = \bar r(t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

Kurvans längd approximeras av

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |\bar r_i - \bar r_{i-1}| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \bar r_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i$$

Om $\frac{d\bar r}{dt}$ är kontinuerlig får vi kurvans längd:

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \bar r_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i = \int_a^b \left|\frac{d\bar r}{dt}\right| dt$$

Båglängden är

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\bar r}{dt}\right| dt$$

Vi får

$$s'(t) = \left|\frac{d\bar r}{dt}(t)\right| = v(t)$$

och båglängdselementet

$$ds = v(t)\,dt = \left|\frac{d}{dt} r(t)\right| dt .$$

$$s(t) = \int_0^t ds$$

Båglängden beror ej på vilken parametrisering vi använder.

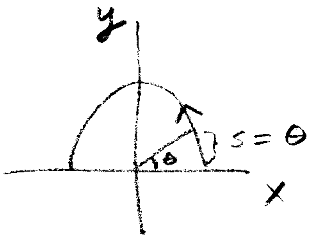
Båglängden kan också användas som parameter:

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \quad 0 \leq s \leq L$$

Då blir farten

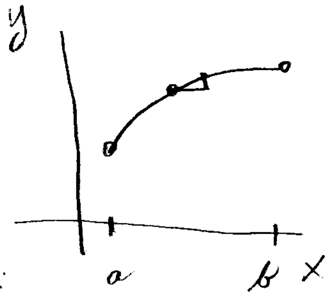
$$v(s) = \frac{ds}{ds} = 1$$

<u>exempel</u> halvcirkeln



$$\begin{cases} x = \cos(s) \\ y = \sin(s) \end{cases}$$

<u>exempel</u> graf i planet



$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Välj x som parameter $t = x$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

$$\bar{v}(t) = \bar{i} + f'(t)\bar{j}, \quad v(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

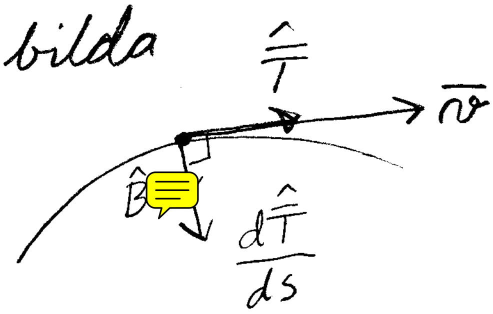
$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$ eller

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

11.4 Krökning endast sid 612-613

$\bar{r} = \bar{r}(t)$

Om $\bar{v}(t) \neq \bar{0}$ kan vi bilda **enhetstangenten**:



$$\hat{T}(t) = \frac{\bar{v}(t)}{v(t)}$$

Med båglängdsparametrisering:

$$\hat{T}(s) = \frac{\bar{v}(s)}{\underbrace{v(s)}_{=1}} = \bar{v}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

Obs att $\hat{T}(s) \cdot \hat{T}(s) = |\hat{T}(s)|^2 = 1$.

Deriverа:

$$2\,\hat{T}(s) \cdot \hat{T}'(s) = 0$$

Definition 1 Kurvans krökning är

$$\mathcal{K}(s) = \left| \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right|$$

Krökningsradien är

$$\rho(s) = \frac{1}{\mathcal{K}(s)}.$$

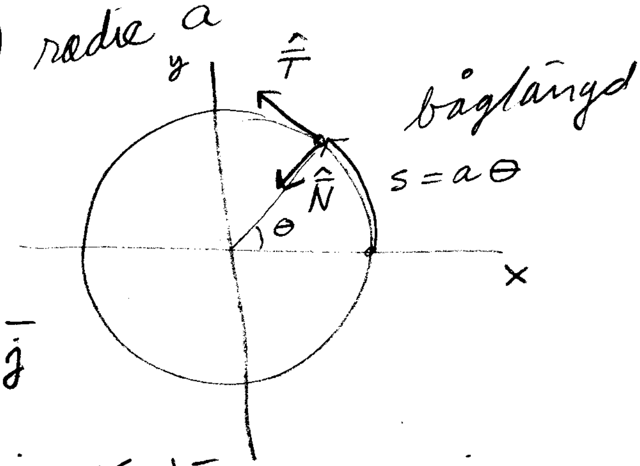
<u>Enhetsnormalen</u> är

$$\hat{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}$$

<u>Enhetsbinormalen</u> är (sid 615)

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

<u>Exempel</u> cirkeln med radie a



$$\bar{r} = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\bar{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\bar{j}$$

$$\hat{T} = \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\bar{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\bar{j}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\bar{i} - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\bar{j}$$

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{a}$$

$$\rho(s) = a$$

$$\hat{N}(s) = -\frac{1}{a}\bar{r}(s)$$

$$\hat{B}(s) = \hat{T} \times \hat{N} = \bar{k}$$

Man kan definiera kurvans <u>torsion</u> genom att beräkna $\frac{d\hat{B}}{ds}$ (sid 616).
Vi nöjer ~~oss~~ med krökning.

11.5 Endast sid 619 och Example 2 sid 621.

Krökning i andra parametriseringar.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\bar{r}}{ds}}_{=\hat{T}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = v\hat{T}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{T} + v \underbrace{\frac{d\hat{T}}{ds}}_{=\kappa\hat{N}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{T} + v^2\kappa\hat{N}$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = v\frac{dv}{dt} \underbrace{\hat{T} \times \hat{T}}_{=\bar{0}} + v^3\kappa\, \hat{T} \times \hat{N}$$

$$= v^3\kappa\, \hat{T} \times \hat{N} = v^3\kappa\, \hat{B}$$

Denna formel kan användas för att beräkna κ.

$$|\bar{v} \times \bar{a}| = v^3\kappa\, |\hat{B}| = v^3\kappa$$

$$\kappa = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{v^3}.$$

Exempel 2 sid 621

Graf $y = f(x)$, Parameter x.

$$\bar{v} = \bar{i} + f'(x)\bar{j}, \quad v = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$\bar{a} = f''(x)\bar{j}$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = f''(x)\bar{k}$$

$$\kappa = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{v^3} = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + f'(x)^2\right)^{3/2}}$$

(Mikael Enelund kommer att visa en annan härledning av denna viktiga formel.)