

12.1 Funktion av flera variabler.

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$R(f) = \text{värdemängden}, \quad R(f) \subset \mathbb{R}$$

$$D(f) = \text{definitionsområdet}, \quad D(f) \subset \mathbb{R}^m$$

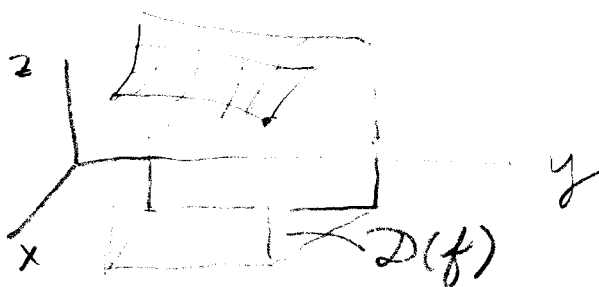
Om 2 eller 3 variabler skriver vi ofta

$$f(x, y), \quad f(x, y, z).$$

Graf (av två-variabel funktion)

Plotta $z = f(x, y)$ i (x, y, z) -rummet.

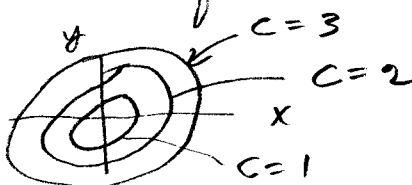
Yta.



Nivåkurvor ("level curves")

Plotta

$$f(x, y) = c \quad \text{för olika } c.$$



Öbörövning?

12.2 Gränsvärde och kontinuitet

Definition 2 Vi säger att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

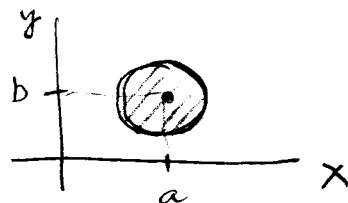
om

(i) varje omgivning av (a,b) innehåller punkter i $D(f)$ som är skilda från (a,b)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sådant att

$$\begin{cases} (x,y) \in D(f) \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

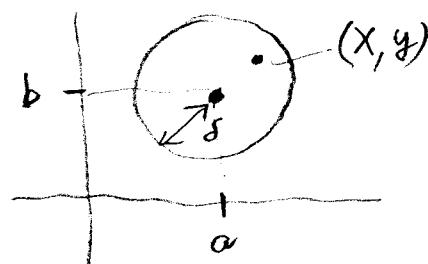
Referera 10.1: en omgivning av (a,b) är en öppen cirkelstiva (disk)



Obs: Om avståndet mellan (x,y) och (a,b) är mindre än δ ,

$$|(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}| < \delta$$

så blir $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.



Exempel $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Typ " $\frac{0}{0}$ ".

På x-axeln ($y=0$): $f(x, y) = f(x, 0) = 0 \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

På y-axeln $x=0$: samma

På linjen $y=x$: $f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} \rightarrow 1, x \rightarrow 0$

Gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ existerar ej.

Exempel $\lim_{(x,y)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

Beweis $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Definition 3 Funktionen f är kontinuerlig i (a, b) om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$