FÖ 2.3

12.3 Partiella derivator

Definition 4 De partiella derivatorna av $f(x,y)$ med avseende på x och y är

$$f_1(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

Exempel $f(x,y) = x^3y^2+x$

$$f_1(x,y) = 3x^2y^2+1$$

$$f_2(x,y) = 2x^3y$$

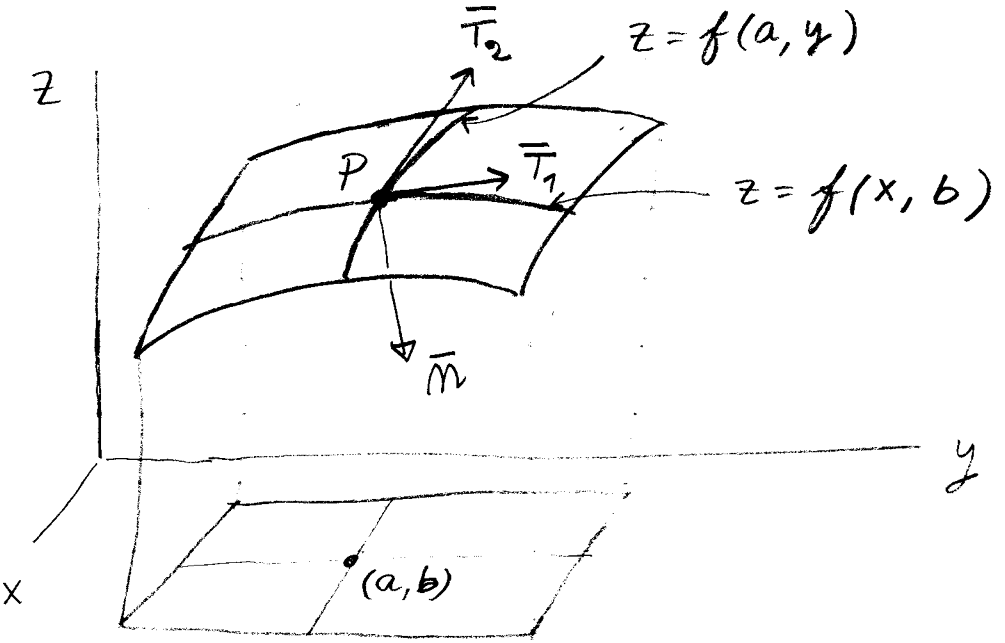
Beteckningar $z = f(x,y)$

$$f_1(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = D_1 f(x,y) = D_x f(x,y)$$

$$f_2(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = D_2 f(x,y) = D_y f(x,y)$$

Tangentplan och normal till yta

Graf: $z = f(x,y)$ $\qquad P = (a, b, f(a,b))$



Två kurvor på ytan: $z = f(x,b)$ och $z = f(a,y)$

På parameterform:

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + b\,\bar{j} + f(x,b)\,\bar{k}$$

$$\bar{r} = a\,\bar{i} + y\,\bar{j} + f(a,y)\,\bar{k}$$

Tangentvektorer i P:

$$\bar{T}_1 = \frac{d\bar{r}}{dx} = \bar{i} + f_1(a,b)\,\bar{k}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{d\bar{r}}{dy} = j + f_2(a,b)\,\bar{k}$$

De spänner upp <u>tangentplanet</u> i P.

En normalvektor ges av

$$\bar{n} = \bar{T}_2 \times \bar{T}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f_1(a,b)\,\bar{i} + f_2(a,b)\,\bar{j} - \bar{k}$$

Tangentplanets ekvation:

$$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$$

Detta är alltså ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $P = (a, b, f(a,b))$.

Senare ska göra detta på annat sätt med hjälp av gradientvektor.

12.4 Derivator av högre ordning.

Rena andra-derivator $\underbrace{}_{}$ av $z = f(x,y)$, med avseende på x och y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x,y) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

Blandade derivator med avseende på x och y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

Man borde nog beteckna derivator med "prim", dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x,y) = f_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{21}''(x,y) = f_{yx}''(x,y)$$

och så vidare. Så att man inte förväxlar med vektor- och matris-index, t.ex.,

$$f = (f_1, \cdots, f_n)\ .$$

Exempel $f(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$

$f_1'(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$ $f_2'(x,y,z) = -z^2 e^{x-y}$

$f_3'(x,y,z) = 2z\,e^{x-y}$

$f_{31}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f_3' = 2z\,e^{x-y}$

$f_{13}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} f_1' = 2z\,e^{x-y}$

$f_{133}'''(x,y,z) = 2\,e^{x-y}$, $f_{313}''' = 2\,e^{x-y}$

Obs att $f_{31}'' = f_{13}''$, $f_{133}''' = f_{313}'''$ här. Det är ingen slump.

Sats 1 (Blandade derivator är lika.)

Antag att två blandade derivator av ordning n består samma derivator i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning till P så är de två blandade derivatorna lika i P.

Utan bevis.

En lite enklare (men svagare) formulering:

Om alla partiella derivator till f är kontinuerliga i en omgivning till P så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de blandade partiella derivatorna.

Exempel 3 (Laplace ekvation)

Visa att $z = e^{kx}\cos(ky)$ $(k \in \mathbb{R})$

uppfyller den partiella differential-ekvationen (PDE)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Bevis: $\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx}\cos(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx}\sin(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx}\cos(ky)$

så att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky) - k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0$$

Exempel 4 (Vågekvationen)

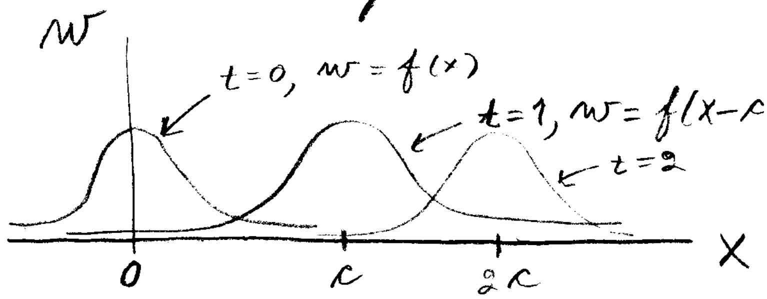
Funktionen

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

uppfyller PDE:n

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Här betyder termen $f(x-ct)$ en våg som rör sig åt höger med hastigheten c.



Termen $g(x+ct)$ är en våg som rör sig åt vänster.