

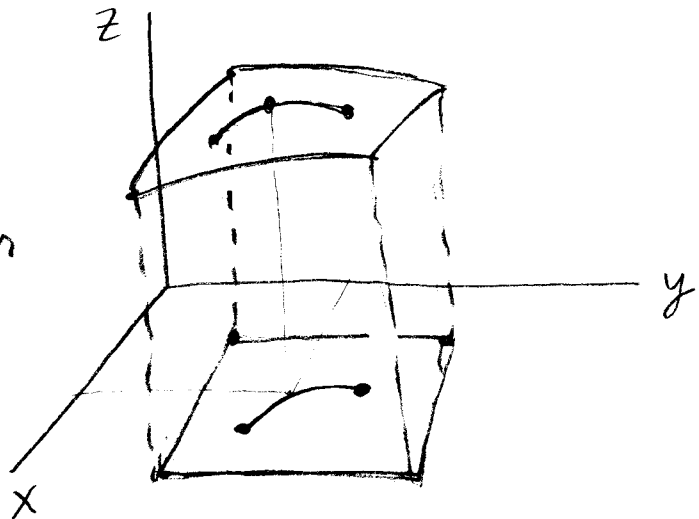
12.5 Hedjeregeln (endast sid 663-665 + example 10)
sid 670

En partikel rör sig på en yta

$$z = f(x, y).$$

Om partikelns
 x, y -koordinater
är

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$



så är höjden vid tiden t

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t).$$

Höjdändringen per tidsenhet blir

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u(t+h) - u(t) \\ \Delta v = v(t+h) - v(t) \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t) + \Delta u, v(t) + \Delta v) - f(u(t), v(t) + \Delta v)}{\Delta u} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t), v(t) + \Delta v) - f(u(t), v(t))}{\Delta v} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}
\end{aligned}$$

- Det verkar som om gränsvärdet blir

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f'_1(u(t), v(t)) u'(t) + f'_2(u(t), v(t)) v'(t)$$

Kan också skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

På matrisform:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \begin{bmatrix} f'_1(u(t), v(t)) & f'_2(u(t), v(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

Obs att de partiella derivatorna $f'_1(u, v)$, $f'_2(u, v)$ bildar en radvektor medan de ordinära derivatorna $u'(t)$, $v'(t)$ bildar en kolonnvektor.

En annan version av kedjeregeln.

(3)

$$z = f(x, y), \quad x = u(s, t), \quad y = v(s, t)$$

$$z = f(u(s, t), v(s, t)) = g(s, t)$$

$$\begin{cases} g'_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} g(s, t) = f'_1(u(s, t), v(s, t)) u'_1(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t)) v'_1(s, t) \\ g'_2(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(s, t) = f'_1(u(s, t), v(s, t)) u'_2(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t)) v'_2(s, t) \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

På matrisform:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

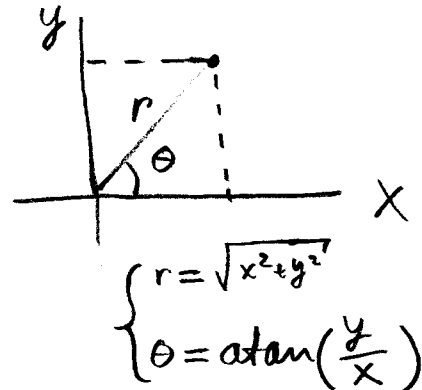
Fler versioner är möjliga beroende på hur många variabler som man har.

(4)

Exempel 10 Laplaces ekvation i
polära koordinater.

Antag $z = f(x, y)$ och inför
polära koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Visa att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Bewis. Vi beräknar vänsterledet med
kedjeregeln.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r} \stackrel{\theta = \text{konstant}}{=} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)$$

$$+ \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$r = \text{konstant}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \stackrel{\downarrow}{=} -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= \boxed{-r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y}}$$

$$= -r \frac{\partial z}{\partial r} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$= -r \frac{\partial z}{\partial r} + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Alltså:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Att kunna räkna med polära koordinater är mycket viktigt.

Övning 12.5:24 görs detta på ett annat sätt.

12.6 Deriverbarhet

(6)

(endast sid 672-675, sat ~~4~~ 4, 5 utan bevis)

För att kunna bevisa kedjeregeln måste man veta vad som menas med att en flervariabel-funktion är deriverbar.

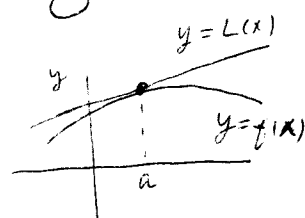
Kom ihåg ~~en-variabel~~ ordinär derivata (en-variabelfunktion):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

Med $x = a+h$, $h = x-a$ har



vi linjärisseringen av f i a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Ekvationen $y = L(x)$ dos

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

är ekv. för tangenten till grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.

7
Två-variabelsfunktion. Linjäriseringen
av $f(x, y)$ i punkten (a, b) är
med $x = a + h$, $y = b + k$

$$L(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k$$
$$= f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b)$$

Ekvationen ~~$z = f(x, y)$~~ $z = L(x, y)$ dvs

$$z = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b)$$

är ekvationen för tangentplanet
till grafen ~~$z = f(x, y)$~~ $z = f(x, y)$ i punkten
 $(a, b, f(a, b))$. Se sidan 654.

Om detta ska vara sant så måste
 $L(x, y)$ vara en bra approximation
till $f(x, y)$ nära ~~(a, b)~~ punkten (a, b) .

Vi använder detta villkor som
definition av deriverbarhet.

Definition 5 Funktionen $f(x, y)$ är
deriverbar ("differentiable") i (a, b)

om

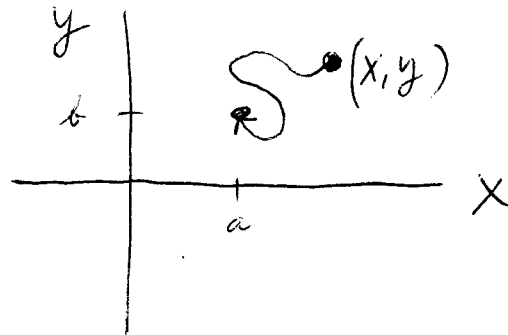
$$\lim_{\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_1(a, b)h - f'_2(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_1(a, b)h - f'_2(a, b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Obs: $\sqrt{h^2+k^2}$ är avståndet mellan $(x, y) = (a+h, b+k)$ och (a, b) .

Obs: vi har hittills bara krävt att f ska vara partiellt deriverbar dvs att $f'_1(a, b), f'_2(a, b)$ ska existera.

Men det innebär bara att linjärserier är en bra approximation längs x och y -axlarna separat ~~och~~ och funktionen behöver inte ens ~~vara~~ ~~kontinuerlig~~ vara kontinuerlig i (a, b) . Nu kräver vi att approximationen ska vara bra oavsett ~~i vilken~~ ~~längs~~ längs vilken väg vi närmar oss (a, b) .



Skippa Sats 3.

Nu kan man ~~bevisa Sats 3~~
formulera och bevisa Sats 4 & 5.

Vi skippar bevisen.

Sats 4 Om f_1' och f_2' är kontinuerliga
i en omgivning av (a, b) så
är f deriverbar i (a, b) .

Obs det räcker alltså att de partiella
derivatorna existerar och är kontinuerliga
nära (a, b) för att f ska vara
deriverbar på riktigt.

Sats 5 Kedjeregeln

~~Antag~~ Låt $z = f(x, y)$ med $x = u(s, t)$, $y = v(s, t)$

Antag (i) $u(a, b) = p$, $v(a, b) = q$,

(ii) $u_1'(a, b)$, $u_2'(a, b)$, $v_1'(a, b)$, $v_2'(a, b)$ existerar,

(iii) f är deriverbar i (p, q) .

Då är den sammansatta funktionen

$g(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ partiellt deriverbar
i (a, b) och kedjeregeln gäller.