FÖ 2.3 (2007-08)

12.7 Gradient och riktningsderivata

(ej "Rates percieved..." sid 685)

I FÖ 2.2: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(a) = f'(a) = Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

(radmatris) dvs matrisbeteckningar.

Nu återgår vi till

geometriska beteckningar.

Gradienten till funktionen $f(x,y)$ i punkten (x,y) är

$$\bar{\nabla} f(x,y) = f'_x(x,y)\,\bar{i} + f'_y(x,y)\,\bar{j}$$

Obs:

- $\bar{\nabla} f(x,y)$ är en vektorvärd funktion (vektorfält).
- $f(x,y)$ är skalärvärd funktion (skalärt fält).
- $\bar{\nabla}$ är nabla-operatorn, en vektorvärd deriveringsoperator:

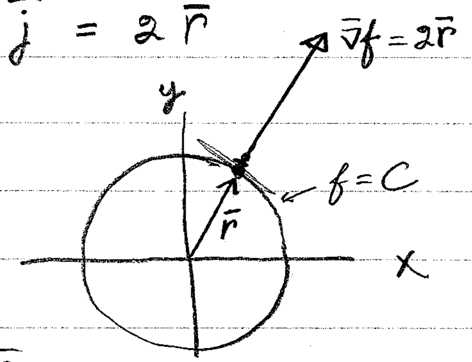
- nabla verkar på f:

$$\bar{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j}\right) f$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$$

- gradienten skrivs ofta $\overline{\text{grad}}\, f$ (jag gör inte det).

Exempel $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\bar{\nabla} f(x,y) = 2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} = 2\,\bar{r}$$



Obs: $\bar{\nabla} f$ är ortogonal mot nivåkurvorna
$$f(x,y) = C$$
utom i origo där $\bar{\nabla} f(0,0) = \bar{0}$.

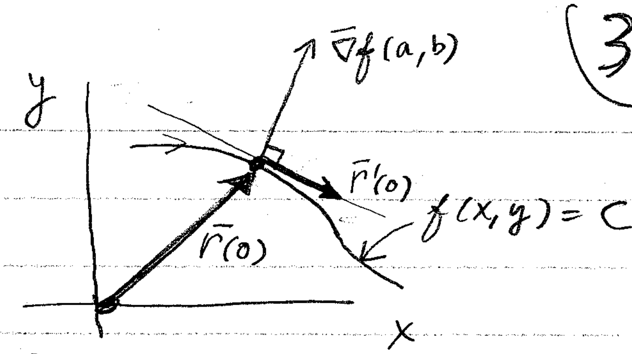
(med bevis!)

Sats 6 Antag • f deriverbar i (a,b)
• $\bar{\nabla} f(a,b) \neq \bar{0}$

Då är $\bar{\nabla} f(a,b)$ en normalvektor till nivåkurvan till f genom (a,b).

Bevis Parametrisera nivåkurvan,
$\bar{r} = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j}$ så att $x(0) = a$, $y(0) = b$.

Eftersom $f(x,y)=C$ på kurvan så gäller



$$f(x(t),y(t)) = C = f(a,b)$$

Kedjeregeln ger nu

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) =$$

$$= f'_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f'_y(x(t),y(t))\,y'(t)$$

$$= \left(f'_x(x(t),y(t))\bar{i} + f'_y(x(t),y(t))\bar{j}\right)\bullet\left(x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j}\right)$$

$$= \bar{\nabla} f(x(t),y(t)) \bullet \bar{r}'(t)$$

Speciellt med $t=0$ får vi

$$\bar{\nabla} f(a,b) \bullet \bar{r}'(0) = 0$$

dvs gradienten $\bar{\nabla} f(a,b)$ är ortogonal mot tangenten $\bar{r}'(0)$.

Riktningsderivata

Låt $\bar{u} = u\bar{i} + v\bar{j}$ vara en enhetsvektor, dvs $|\bar{u}| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$.

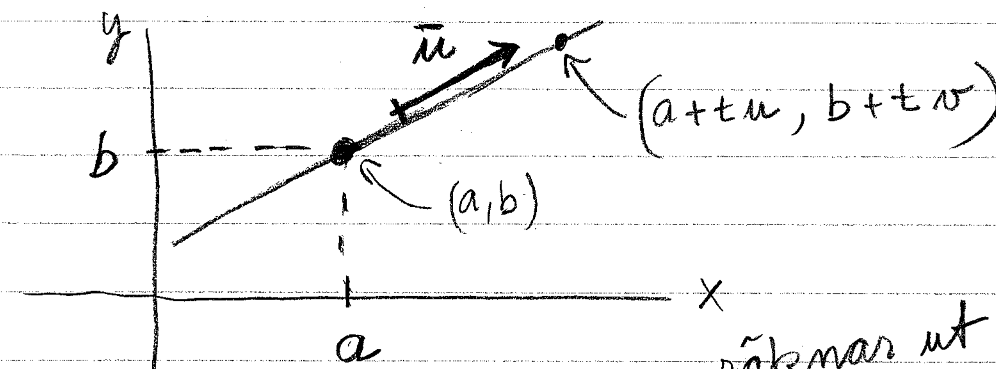
Riktningsderivatan av f i (a,b) i riktningen $\bar{u}$ är

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu,\, b+tv)\Big|_{t=0}$$

Obs: vi deriverar en-variabelfunktionen

$$g(t) = f(a+tu,\, b+tv) \quad \text{i punkten } t=0$$

dvs $$D_{\bar{u}} f(a,b) = g'(0).$$



Funktionen $g(t)$ $\overbrace{\text{evaluerar}}^{=\text{ räknar ut}}$ f längs räta linjen genom (a,b) med riktningsvektorn $\bar{u}$.

<u>Sats 7</u> (med bevis!) Om är deriverbar i (a,b) så gäller

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b)$$

<u>Bevis.</u> Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt} f(a+tu,\ b+tv) =$$

$$= f'_x(a+tu,\ b+tv)\,u + f'_y(a+tu,\ b+tv)\,v$$

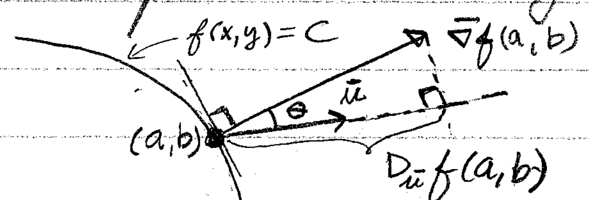
$$= \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a+tu,\ b+tv)$$

Med $t=0$ får vi

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b).$$

Obs: $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b)$ är den skalära projektionen av gradientvektorn på riktningen $\bar{u}$.

(Se Adams 10.2.)



$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \cdot \bar{\nabla} f(a,b) = |\bar{\nabla} f(a,b)| \cos\theta$$

är maximal då $\bar{u}$ pekar längs $\bar{\nabla} f(a,b)$, $\cos\theta = 1$.
Alltså: $\bar{\nabla} f(a,b)$ pekar i den riktning där f ökar mest i (a,b).

Skippa 12.8.

12.9 Taylors formel.

Endast Taylor-polynom av grad 2. (sid 699–700)

Kom ihåg Taylors formel i en variabel: $(x = a+h)$

$$F(x) = F(a+h) + F'(a)\,h + \frac{1}{2} F''(a)\,h^2 + R_2(a,h)$$

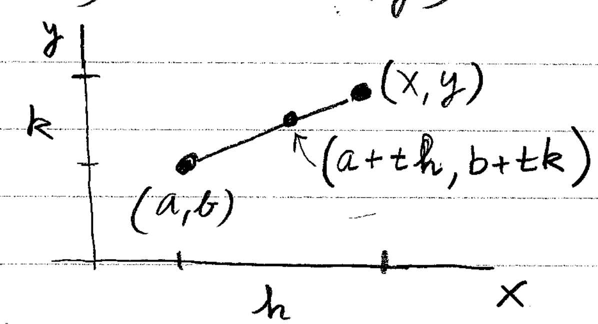
med $R_2(a,h) = \frac{1}{3!} F'''(s)\,h^3$ där s är mellan a och x.

Två variabler: $x = a+h$, $y = b+k$

Bilda en en-variabelfunktion genom att evaluera $f(x,y)$ längs räta linjen från (a,b) till (x,y).

$$F(t) = f(a+th,\, b+tk)$$

$0 \le t \le 1$



$$F(0) = f(a,b)$$

Skriv ned Taylors formel för F:

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2}F''(0)1^2 + \frac{1}{6}F'''(s)1^3$$

där $0 \le s \le 1$.

Här är (kedjeregeln!)

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th, b+tk) =$$

$$= f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$F'(0) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k =$$

$$= [f'_x(a,b) + f'_y(a,b)] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$F''(t) = f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 +$$

$$+ f''_{xy}(a+th, b+tk)hk$$

$$\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right) \qquad + f''_{yx}(a+th, b+tk)kh$$

$$+ f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

$$F''(0) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$$= [h, k] \begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Taylors polynom av grad 2:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\,h + f'_y(a,b)\,k +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2 f''_{xy}(a,b)\,hk + f''_{yy}(a,b)\,k^2 \right)$$

$$= f(a,b) + \begin{bmatrix} f'_x(a,b), & f'_y(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Obs gradientvektorn:

$$\nabla f(a,b) = f'(a,b) = \begin{bmatrix} f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{bmatrix} \text{ rad}$$

och <u>Hesse-matrisen</u>:

$$D^2 f(a,b) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \text{ symmetrisk matris}$$

Taylors formel (grad 2):

$$f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x,y)$$

där $R_2(x,y) = F'''(s) = f'''_{xxx}\,h^3 + 3 f'''_{xxy}\,h^2 k +$

alla derivatorna evalueras i den (okända) mellanliggande punkten $(a+sh, b+sk)$, $0 \leq s \leq 1$.

(Resttermen kan ej skrivas matrisform. Varför?)

Mer allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$

$$f(x) = f(a+h) =$$

$$= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R_2(x)$$

där $f'(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

symmetrisk: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Obs formen: $f(a+h) = f(a) + [\cdots]\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[\cdots]\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + R$