

## Fö 3.1 Extremvärdesproblem

Adams 13.1

Mycket ingenjörsarbete går i grunden ut på att optimera dvs minimera eller maximera en funktion. T.ex. maximera utbytet av en process, minimera materialåtgången, ...

Dvs  $\max f(x)$

eller  $\min f(x)$

Obs  $\max f(x) = \min(-f(x))$ .

Ofta många variabler:

$$\max f(x_1, \dots, x_n)$$

Det handlar om att sortera värdena, oerhört kostsam beräkning.

12  
Ofta kan man ta en  
genväg med flervariabel-  
analys: i max-punkt  
gäller

$$f'(x) = 0$$

Ekvationssystem, Newtons  
metod.

Matematisk disciplin:

optimeringslära.

### 13.1 Extremvärden

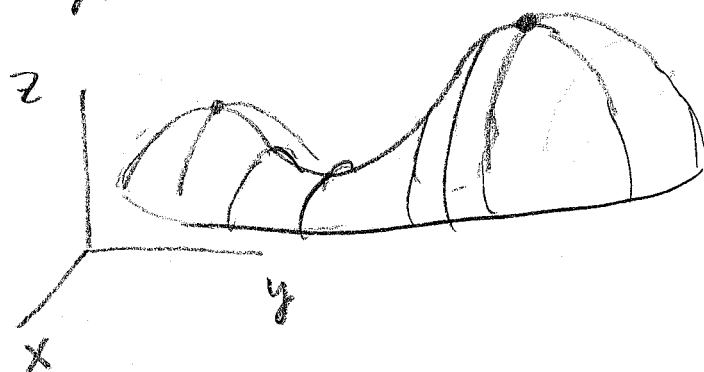
3

två variabler  $z = f(x, y)$

Funktionen  $f$  har

lokalt maximum i  $(a, b)$  om

$f(x, y) \leq f(a, b)$  för alla  $(x, y) \in D_f$   
som är tillräckligt nära  $(a, b)$ .



Funkt.  $f$  har globalt maximum  
i  $(a, b)$  om

$f(x, y) \leq f(a, b)$  för alla  $(x, y) \in D_f$ .

Extremvärde = maximum eller  
minimum.

Extrempunkt = punkten  $(a, b)$  där  
extremvärdet inträffar.

# Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde) <sup>4</sup>

Om  $f$  har extremvärde i  $(a, b)$   
så är  $(a, b)$  en av följande:

(a) kritisk punkt till  $f$ , dvs  $\nabla f(a, b) = \vec{0}$

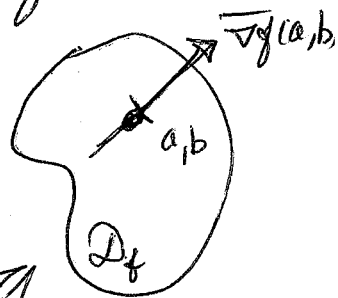
(b) singulär punkt till  $f$ , dvs  $\nabla f(a, b)$   
existerar ej

(c) randpunkt till  $D_f$ .

Bewis Låt  $f$  ha extrempunkt i  $(a, b)$ .

Om  $(a, b)$  inte är randpunkt till  $D_f$   
så är  $(a, b)$  en inre punkt till  $D_f$ .

Om  $(a, b)$  inte är kritisk punkt  
så är  $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$ . Då har  
 $f$  positiv riktningsderivata  
i riktningen  $\vec{u} = \nabla f(a, b) / |\nabla f(a, b)|$   
och negativ rikt. der. i rikt  $-\vec{u}$ .



$$D_{\vec{u}} f(a, b) \begin{cases} > 0, & \vec{u} = \nabla f(a, b) / |\nabla f(a, b)| \\ < 0, & \vec{u} = -\nabla f(a, b) / |\nabla f(a, b)| \end{cases}$$

Dvs  $f$  ökar i en riktning och minskar  
i en riktning när vi går från  $(a, b)$ .

Alltså inget max. eller min. i  $(a, b)$ . 5

---

Samma sak gäller i  $N$ -variabler:  $f(x_1, \dots, x_N)$ .

---

Satsen talar om i vilka punkter vi ska söka ~~extrem~~ punkter. Men den garanterar inte att det finns extrempunkter.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde.)

Om  $f$  är kontinuerlig och  $D_f \subset \mathbb{R}^N$  är sluten och begränsad så finns punkter i  $D_f$  där  $f$  har absoluta max. och min.

(utan bevis)

Exempel  $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x=0, y=0$$

Alltså: kritisk punkt i  $(0,0)$

Vi ser att vi har ~~lokalt~~ globalt.

min. i  $(0,0)$ : ~~min~~

$$x^2 + y^2 > 0 \quad \text{om } (x,y) \neq (0,0)$$

Exempel  $f(x,y) = \cancel{y^2} - x^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = -2x\vec{i} + 2y\vec{j} = \cancel{\vec{0}} \vec{0}$$

$$\Rightarrow x=0, y=0$$

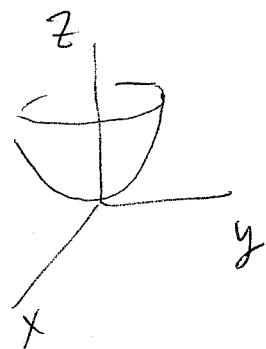
Kritisk punkt i  $(0,0)$ .

Varken max eller min:

$$f(x,0) = -x^2 < f(0,0) = 0 \quad \text{om } x \neq 0$$

$$f(0,y) = y^2 > f(0,0) = 0 \quad \text{om } y \neq 0$$

Sadelpunkt.



6

7  
~~De~~ Vi säger att en inre kritisk punkt är sadelpunkt om den ~~är~~ är varken max. eller min. punkt.

Hur vet man om en kritisk punkt är max./min eller sadel?

Nästa sats ger delvis svar.

### Sats 3 (Andra-derivat-testet)

Antag  $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$  har en kritisk punkt i en inre punkt  $a$  till  $D_f$ . Antag att alla andra ordn. part. derivator till  $f$  är kont. i omgivning till  $a$ , så att Hesse-matrisen

$$H(x) = f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \dots & f''_{1N}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{N1}(x) & \dots & f''_{NN}(x) \end{bmatrix} \quad (N \times N)$$

och så är kont. obs:  $H(x)$  är symmetrisk eftersom derivatorna är kont. i omgivning av  $a$  (Sats 1 i 12.4). Då gäller:

- a)  $H(a)$  positivt definit  $\Rightarrow$  lok. min i  $a$ .
- b)  $H(a)$  negativt definit  $\Rightarrow$  lok max i  $a$ .
- c)  $H(a)$  indefinit  $\Rightarrow$  sadelpunkt i  $a$ .
- d) om  $H(a)$  varken pos., neg. definit eller indefinit så ger testet ingen information.

Kom ihåg från linjär algebra:

En symmetrisk matris  $A$ , dvs  $A^T = A$  är

- a) pos. def.  $\Leftrightarrow x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$  alla egenvärden  $\lambda_j > 0$
- b) neg. def.  $\Leftrightarrow x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$  — " —  $\lambda_j < 0$
- c) indefinit  $\Leftrightarrow x^T A x > 0$  och  $y^T A y < 0$  för några  $x, y$   
 $\Leftrightarrow A$  har både pos och neg egenvärden.



abs att funktionen  $g(x) = x^T A x$ ,  $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
är en kvadratisk funktion:

$$g(x) = [x_1, \dots, x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} =$$

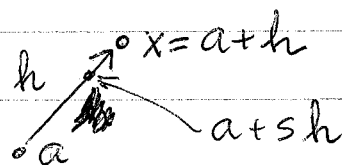
$$= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{NN} x_N^2$$

Beweis av Satz 3.

Taylor's formel av grad 1: ( $x = a + h$ )

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a+sh)h$$

där  $0 \leq s \leq 1$ .



på formen:  $\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

Här är  $f'(a) = 0$  (kritisk punkt),  
så att

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} h^T f''(a+sh)h$$

Om  $f''(a)$  är positivt definit så  
 är även  $f''(a+sh)$  positivt definit  
 om  $|h|$  är liten. I så fall:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} h^T f''(a+sh) h}_{>0} > 0$$

○ för alla  $h$  med  $|h|$  litet.

○ Alltså: lok. min. i  $a$ .

Det bevisar a). De andra fallen bevisas på liknande vis.

○ Undersök de krit. punkterna till  $f$ .  
 Lösningens metod.

○ 1) Krit. punkter ges av

$$f'(x)^T = 0$$

~~Linjär~~ Ekvationssystem. Lösas för  
 hand eller bättre med Newtons  
 metod.

2) För varje kritisk punkt  $a$  ställer  
 vi upp Hesse-matrisen  
 $H(a) = f''(a)$ .

egenvärdena beräknas. Om alla  
egenvärden är  $> 0$  så har  
vi lok. min i  $a$ .

Och så vidare.

Obs att Hesse-matrisen är  
Jacobi-matrisen till  $f'(x)^T$ .

Använd ej "Remark" på  
sid 712. Det är en

ointressant handräknings-  
metod som bara fungerar  
då  $N=2$ . ~~It~~

(Ger noll poäng på tentan!!)