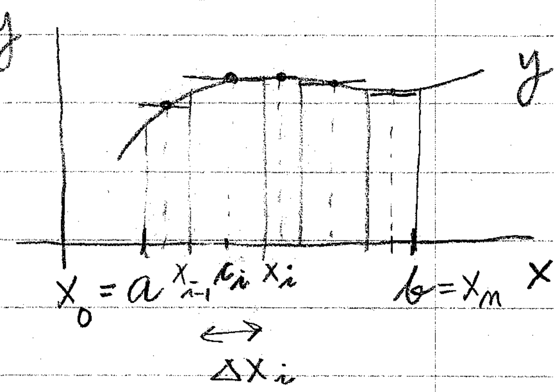
FÖ 3.2

14.1 Dubbelintegralen

Kom ihåg enkelintegralen (Adams 5.3):



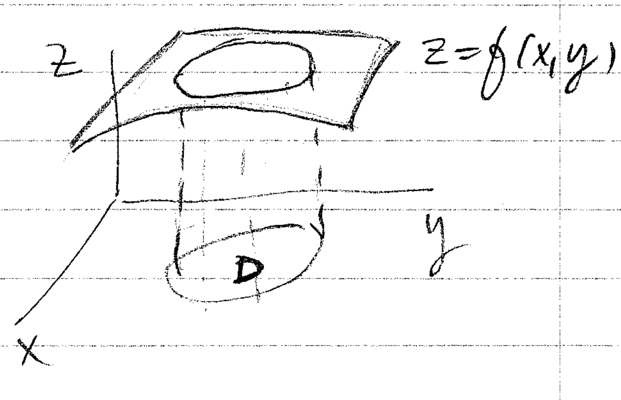
$\|P\| = \max \Delta x_i$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$ (Riemann-summa)

= arean under grafen om $f(x) \geq 0$.

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

$\iint_D f(x,y)\,dA$ = volymen under grafen $z = f(x,y)$ om $f(x,y) \geq 0$

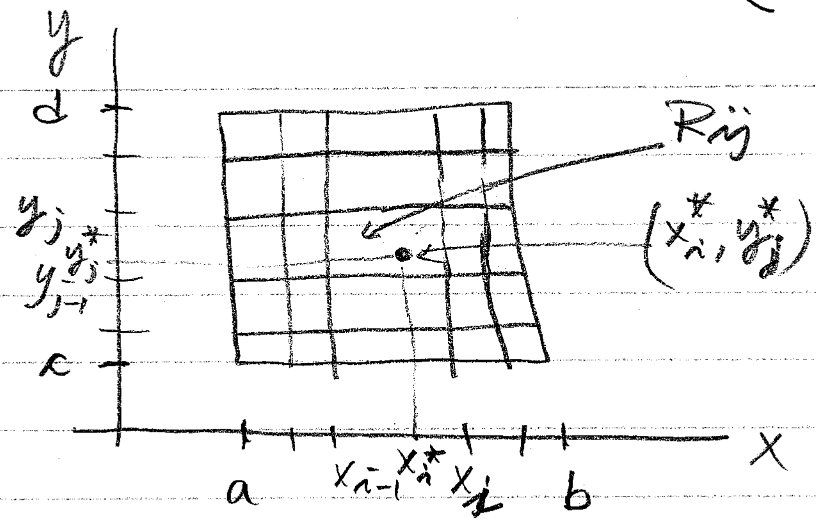


basen D

höjden z

Rektangel D:

$a \le x \le b$
$c \le y \le d$



Partition P: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$
$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < y_N = d$

Rektangel: R_{ij} : $x_{i-1} \le x \le x_i$, $y_{j-1} \le y \le y_j$

Area: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$

Diameter: $\text{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$

Norm: $\|P\| = \max \ \text{diam}(R_{ij})$

Godtycklig punkt: $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$

Riemann-summa:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

Definition 1

Funktionen f är <u>integrerbar</u> över <u>rektangeln D</u> med dubbelintegralen

$$I = \iint_D f(x,y)\,dA$$

Obs: area-elementet $dA = dx\,dy = dy\,dx \approx \Delta x_i \Delta y_j$

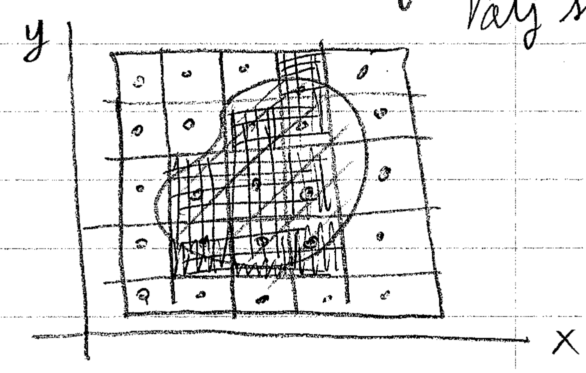
om gränsvärdet

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f,P) = I$$

existerar för varje val av punkter $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.

Allmänt begränsat område:

Välj stor rektangel R så att $D \subset R$.



Bilda funktionen

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Definition 2

Dubbelintegralen över

begränsat område

Egenskaper

a) $\iint\limits_D f(x,y)\,dA = 0$ om area $(D) = 0$

b) area$(D) = \iint\limits_D 1\,dA$

c) volym: om $f(x,y) \geq 0$ på D

så är $\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ = volymen

under grafen $z = f(x,y)$.

d) om $f(x,y) \leq 0$ så $\iint f(x,y)\,dA$ = − volymen

e) linjär kombination bevaras:

$$\iint\limits_D \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\,dA =$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dA + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dA$$

f) olikhet bevaras: $f(x,y) \leq g(x,y) \Longrightarrow$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dA$$

g) triangelolikheten: $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dA$

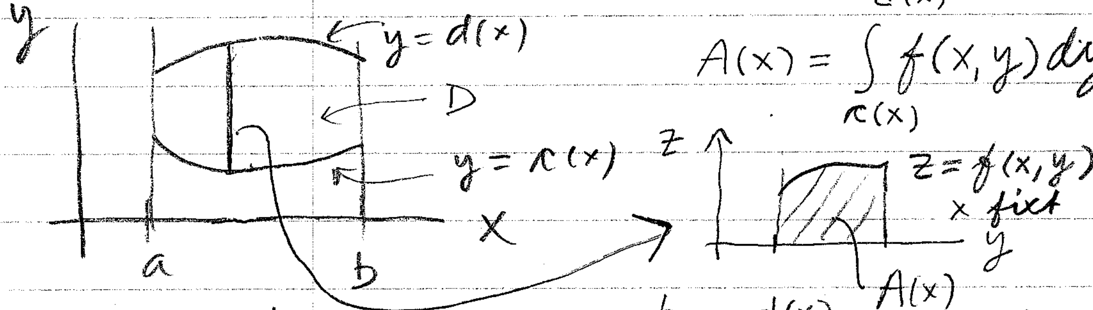
additivitet av områden: $D = D \cup D$ ej

14.2 Beräkning av dubbelintegralen med upprepad integration.

Denna metod fungerar om området D är enkelt i x eller y.

enkelt i y: $a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x)$

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

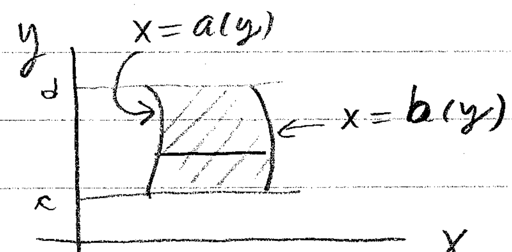


$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

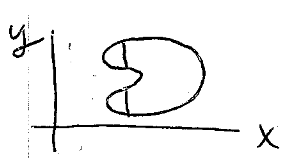
$= \left\{ \begin{array}{l} \text{skrivs} \\ \text{ofta utan parenteser} \end{array} \right\}$

$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

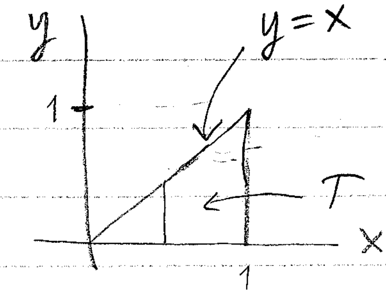
Enkelt i x:



$$\iint f(x,y)\,dA = \int^{d} \int^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ej enkelt i y: 

Exempel.

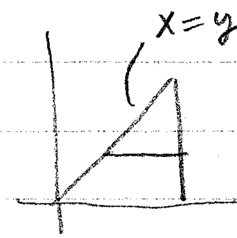


Triangeln T är både enkel i x och y.

$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \int_0^x y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{8}$$



$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy \quad dy$$

$$= \int_0^1 y \int_y^1 x\,dx\,dy = \int_0^1 y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 y\,\frac{1-y^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^3)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$