FÖ 3.3 (2007-08)

14.3 Generaliserad dubbelintegral (improper)

Medelvärde

Integralen $\iint_D f(x,y)\,dA$ är definierad om f är kontinuerlig och begränsad och D är ett begränsat område.

Dvs om både f och D "håller sig borta från oändligheten".

Om någon av dem är obegränsad så säger vi att $\iint_A f(x,y)\,dA$ är generaliserad (improper = oegentlig).

En sådan kan vara konvergent

(2

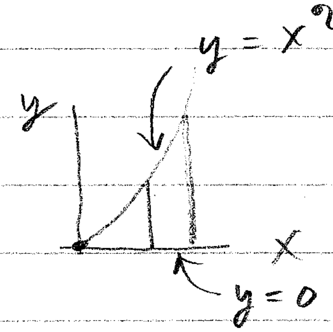
Positiv integrand $f(x,y) \geq 0$.

Om integranden $f(x,y) \geq 0$
så är integralen antingen
konvergent $\iint_D f(x,y)\,dA = I$
eller divergent mot ∞

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \infty$$

Då kan man avgöra konvergens/divergens genom upprepad integration.

Om $f(x,y)$ har både pos. och negativa värden så funkar inte detta: $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ och $\iint f(x,y)\,dy\,dx$ kan ge olika resultat.



Exempel 3 $\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \geq 0$$

$$f(x,y) \to \infty \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx =$$

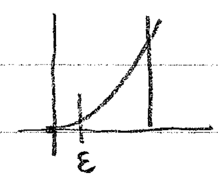
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x) \Big]_{x=0}^{1} = \ln 2.$$

Konvergent. Egentligen borde vi räkna så här:

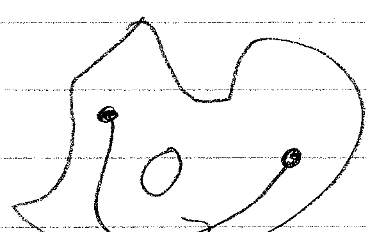
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$$

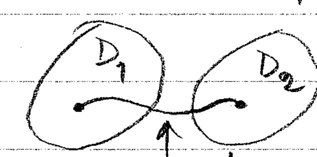


Medelvärden

D är sammanhängande (connected) om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva i D.

$D = D_1 \cup D_2$





utanför D

Sats 3 Antag: • D slutet, begränsat, och sammanhängande område

• f kont. på D

Då finns punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\cdot \text{area}(D)$$

Utan bevis.

Dividera med arean:

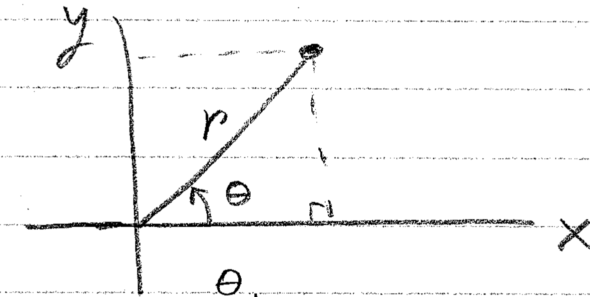
$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA =$$

$=$ medelvärdet av f över D.

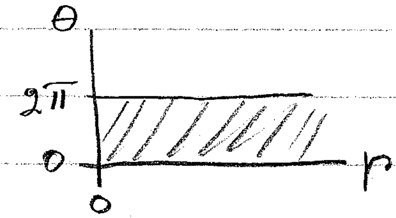
Dvs f kan inte hoppa över sitt medelvärde.

14.4 Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

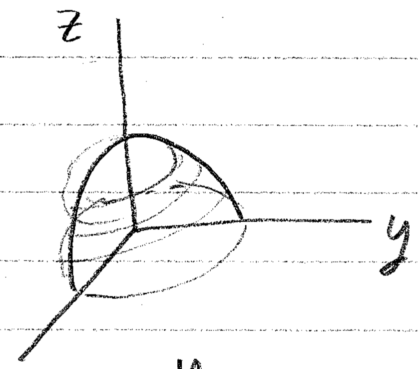


$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$



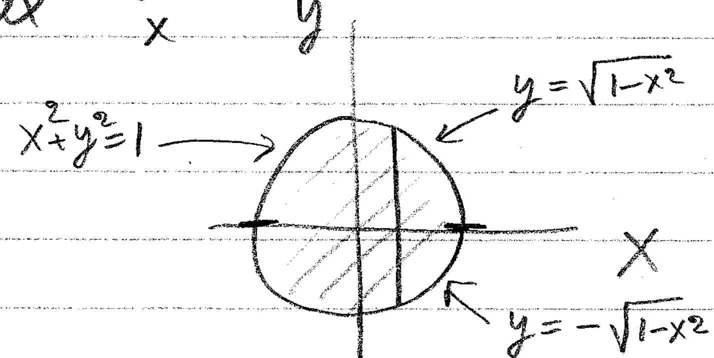
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{atan}(y/x) \end{cases}$$

__Exempel.__ Volymen mellan xy-planet och $z = 1 - x^2 - y^2$.



$$V = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (1 - x^2 - y^2)\, dA =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

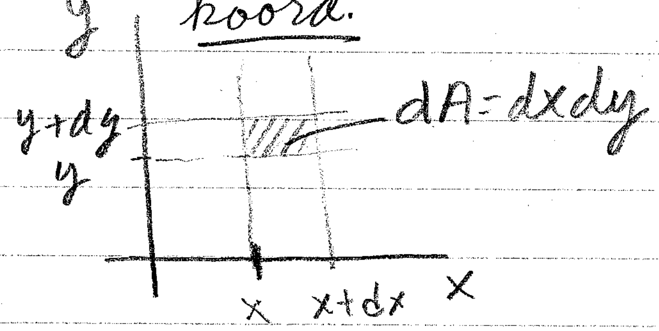


Mycket svår.

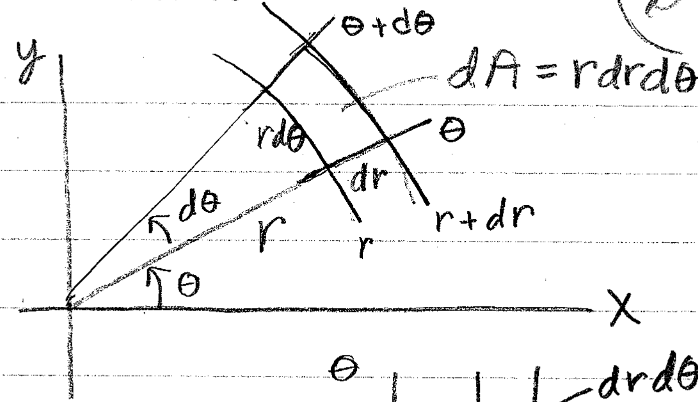
Polära koordinater:

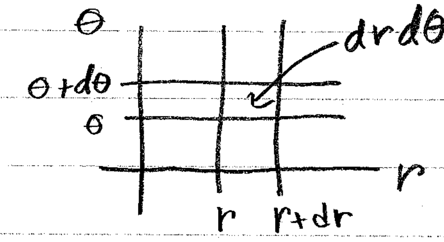
$$V = \iint_{r\leq 1} (1 - r^2)\, dA$$

Cartesiska koord.



Polära koord.





$$dx\,dy = dA = r\,dr\,d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Exempel 4</u> Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

<u>Bevis.</u> Låt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Då blir

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dA$$

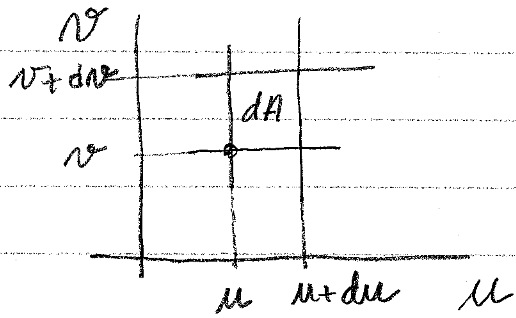
$$= \int^{2\pi}\int^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int^{2\pi} d\theta \int^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr$$

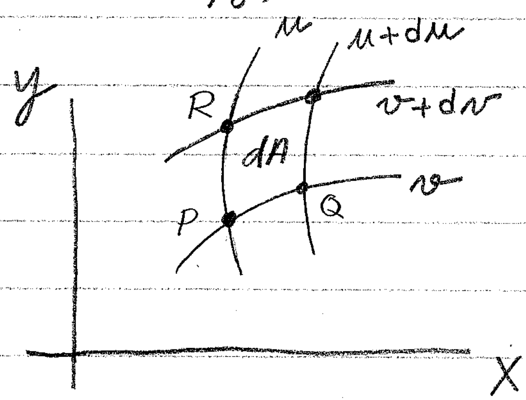
$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}.$$

<u>Variabelbyte.</u> Nya koordinater (u, v).

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$





Den inversa transformationen finns om <u>Jacobi-determinanten</u> $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} \neq 0$

$$dA = |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$$

$$\vec{PQ} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} = \{\text{kedjeregeln}\}$$

$$= \Big(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} \underbrace{dv}_{=0}\Big)\bar{i} + \Big(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} \underbrace{dv}_{=0}\Big)\bar{j}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u} du\,\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du\,\bar{j} = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j}\Big) du$$

$$\vec{PR} = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j}\Big) dv$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\text{transponatet av Jacobi-matrisen}} du\,dv\,\bar{k} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\,\bar{k}$$

$\det(A^T) = \det(A)$

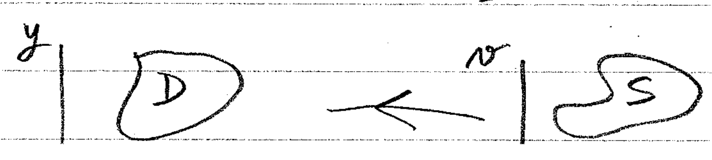
$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

dvs $\quad dx\,dy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

dvs arean skalas med absolutbeloppet av Jacobi-determinanten.

Sats 4

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$



Exempel $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

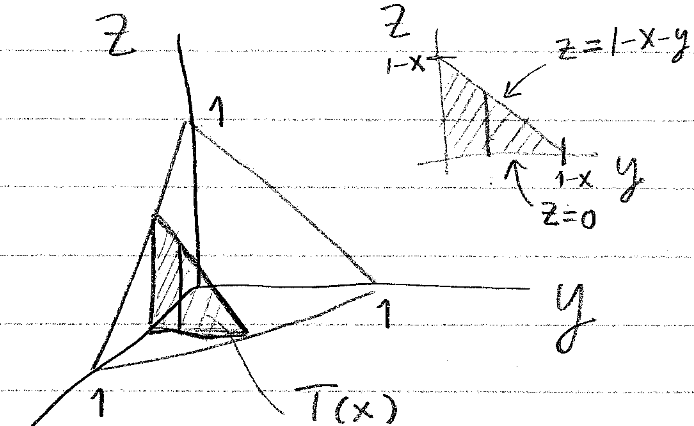
$$dA = |r|\, dr\, d\theta = r\, dr\, d\theta$$

14.5 Trippelintegralen

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Beräknas med upprepad integration.

Exempel Volymen av tetraeder.



$$V = \iiint\limits_T dV =$$

$$= \int_0^1 \iint\limits_{T(x)} dA\, dx$$

$$= \int^1 \int^{1-x} \int^{1-x-y} dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}.$$