

Vi ska lösa partiella differential-
ekvationer (PDE). Till exempel,

Laplaces ekv.: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Poissons ekv.: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$

En PDE ställs upp i ett område i rummet, $D \subset \mathbb{R}^3$, eller i planet, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Man kan också studera tidsberoende PDE. Till exempel,

värmeledningsekv.: $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

vågekv.: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

(Dock ej i denna kurs.)

För att lösningen ska vara unik behöver vi ge randvillkor på

randen $S = \partial D$ till D . Till exempel,
 $u = 0$ på S .

Vi har då ett randvärdesproblem.

- Vi löser PDE numeriskt med finita elementmetoden (FEM) . Denna metod är mycket viktig för maskiningenjören.

FEM bygger på en omskrivning av randvärdesproblemet ^{till en} svag formulering.

- PDE uppträder inom många områden: värmeledning, diffusion, hållfasthet, vågutbredning, strömning, elektromagnetiska fält,

Trots olika bakgrund har dessa PDE väsentligen samma matematiska form. Obs, till exempel, att Laplace-operatorn

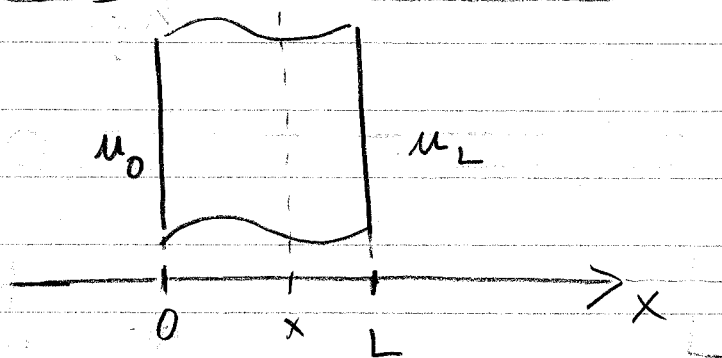
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ingår i samtliga exempel ovan.

För enkelhets skull börjar vi med att studera randvärdesproblem och FEM i en variabel, dvs $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Randvärdesproblem i en variabel.

Värmelednings ekvationen



Temperaturen $u(x)$ vid tvärsnittet x i en oändlig platta med tjockleken L ges av

$$(1) \quad D(-a(x)Du(x)) = f(x) \quad \text{i } I = (0, L)$$

Här är $D = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m} \right]$ och

- $f(x) \left[\frac{J}{m^3 s} \right]$ värmekälltäthet

- $u(x) [K]$ temperatur

- $a(x) \left[\frac{J}{m K s} \right]$ värmeledningskoefficient

- $j(x) = -a(x)Du(x) \left[\frac{J}{m^2 s} \right]$ värmeflödes-

hastighet i x -riktningen
(Fouriers lag)

Vi antar här att inga kvantiteter beror av y och z .

Randvillkor.

Vid $x = L$ gäller att värmeflödeshastigheten i utåtriktningen är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$(2) \quad j(L) = k_L (u(L) - u_L)$$

där u_L är den omgivande temperaturen och

$k_L \left[\frac{J}{m^2 K s} \right]$ en värmeöverföringskoefficient.

På andra sidan är ju

$$j(L) = -a(L) D u(L)$$

Alltså:

$$-a(L) D u(L) = k_L (u(L) - u_L)$$

dvs

$$(3) \quad a D u + k_L (u - u_L) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid $x = 0$ är flödeshastigheten i utåtriktningen

$$(4) \quad -j(0) = k_0 (u(0) - u_0)$$

eftersom $-j(0)$ är flödeshast. i $-x$ -riktningen. (utåt).

Men vi har som förut: $j(0) = -a(0)Du(0)$.

Alltså:

$$-a(0)Du(0) + k_0(u(0) - u_0) = 0$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$(6) \quad a D_n u + k(u - u_A) = 0 \quad \text{för } x=0, x=L,$$

där u_A är den omgivande temperaturen
 $u_A = u_0$ respektive $u_A = u_L$ (ambient temp.),
 $k = k_0$ respektive $k = k_L$,

och D_n är riktningsderivatan i
 den utåtriktade normalens riktning,
 dvs $D_n = -D = -\frac{d}{dx}$ i $x=0$ resp. $D_n = D = \frac{d}{dx}$ i $x=L$.

Specialfall: $\gamma \quad k = \infty$

Om vi dividerar med k ,

$$\frac{1}{k} a D_n u + (u - u_A) = 0$$

och låter $k \rightarrow \infty$ får vi

$$0 + u - u_A = 0$$

dvs

$$u = u_A$$

Detta innebär ingen isolering.

2) $k=0$ (perfekt isolering)

$$a D_n u = 0 \quad (a \neq 0)$$

dvs $Du = 0$.

Lägg till $-g_L$ resp.
 $-g_0$ i (2) och (4).

Randvärdesproblem

Bestäm $u = u(x)$ så att

$$\begin{cases} D(-aDu) = f & \text{i } I \end{cases}$$

$$\begin{cases} a D_n u + k(u - u_A) = g & \text{i } x=0, x=L. \end{cases}$$

Vi har lagt till ett föreskrivet inföde med hast. g [J/m^2s].

Obs strukturen har ekvationerna.

Även mekanikens ekvationer har denna form. Till exempel:

Stångens ekv. (figur nästa sida)

$$\begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{i } I = (0, L) \\ EAD_n u + k u = P & \text{i } x=0, x=L \end{cases}$$

Här är

u [m] axiell förskjutning

EA [$\frac{N}{m^2} \cdot m^2$] styvhet

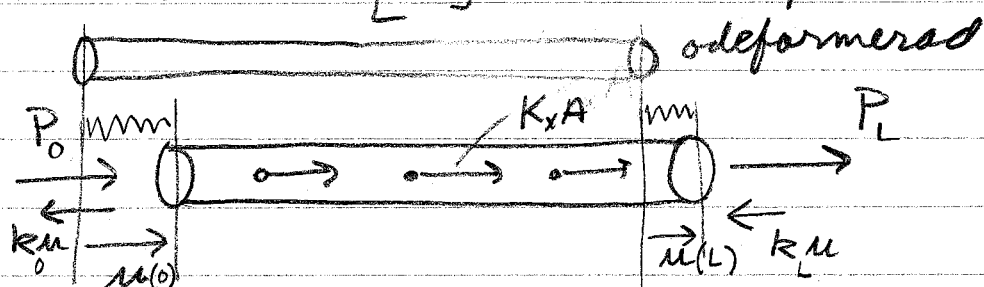
$K_x A$ [$\frac{N}{m^3} \cdot m^2$] yttre last

P [N] utåtriktad kraft

k [N/m] fjäderkonstant

$k \left[\frac{N}{m} \right]$ fjäderkonstant.

$N = EA D u \quad [N]$ snittkraft i x-riktningen



$$(-N(0) = P_0 - k_0 u(0))$$

$$(N(L) = P_L - k_L u(L))$$

Obs: $k = \infty$ betyder $u = 0$, oändlig styv fjädring, fast inspänd.

$k = 0$ betyder fri ände: $EA D_m u = P$

Obs: $N = EA D u$ är Hookes lag. Den spelar samma roll som Fouriers lag i värmeledning:

$$j = -a D u,$$

dvs

$$\begin{aligned} j &\leftrightarrow N \\ a &\leftrightarrow EA \end{aligned}$$

Swag formulering.

Vi multiplicerar ekvationen

$$-D(a D u) = f$$

med en funktion v och integrerar över $I = (0, L)$:

$$\int_0^L f v dx = - \int_0^L D(a D u) v dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partial-} \\ \text{integration} \end{array} \right\}$$

$$= - \left[a D u v \right]_{x=0}^L + \int_0^L a D u D v dx =$$

$$= - a(L) D u(L) v(L) + a(0) D u(0) v(0) + \int_0^L a D u D v dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a(L) D u(L) + k_L (u(L) - u_L) = 0 \\ -a(0) D u(0) + k_0 (u(0) - u_0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{om } g_0 = g_L = 0$$

$$= k_L (u(L) - u_L) v(L) + k_0 (u(0) - u_0) v(0)$$

$$+ \int_0^L a D u D v dx$$

Samla u -termerna på vänster sida:

$$\int_0^L a D u D v dx + k_L u(L) v(L) + k_0 u(0) v(0) =$$

$$= \int_0^L f v dx + k_L u_L v(L) + k_0 u_0 v(0)$$

Denna ekvation ska vara uppfylld för alla funktioner v . Den godtyckliga funktionen v kallas test-funktion.

Denna ekvivalenta formulering av randvärdesproblemet kallas den svaga formuleringen. Den är grunden för finita element-metoden.

Randvillkoret $u = u_A$ ($k = \infty$) är lite speciellt. Då måste man välja test-funktionen så att $v = 0$ i den randpunkt där villkoret $u = u_A$ gäller. Vi visar detta för fallet $u_A = 0$. Om randvillkoren är $u = 0$ i båda ändpunkterna:

$$\begin{cases} -D(a D u) = f & \text{i } I \\ u = 0 & \text{i } x=0, x=L \end{cases}$$

Tag nu v med $v(0) = v(L) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= - \int_0^L D(a D u) v \, dx = - \left[\underbrace{a D u v}_{=0} \right]_{x=0}^L + \int_0^L a D u D v \, dx \\ &= \int_0^L a D u D v \, dx \end{aligned}$$

Den svaga formuleringen blir nu:

Finns $u = u(x)$ sådan att

$$\int_0^L a D u D v dx = \int_0^L f v dx$$

för alla v med $v(0) = v(L) = 0$.

Jag kräver att ni ska kunna bestämma den svaga formuleringen för olika kombinationer av randvillkor samt lösa enkla randvärdesproblem genom att integrera två gånger, se övningarna i slutet av detta häfte.

Finite element metoden

(finite element method)
(uttalas "fajnajt")

Vi ska beräkna en approximativ lösning $U(x)$, som är en styckvis linjär funktion.

Vi inför ett beräkningsnät (mesh):

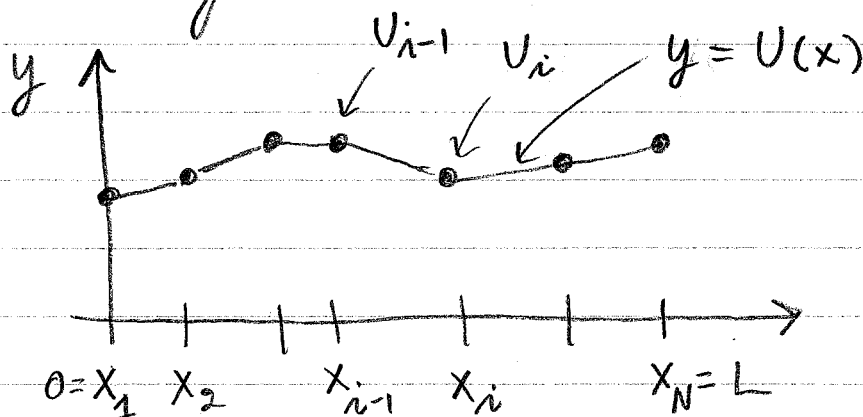
$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N = L$$

(Obs: "Matlab-numrering" som börjar med x_1 .)

Vi har alltså N punkter (noder)

och $N-1$ intervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$

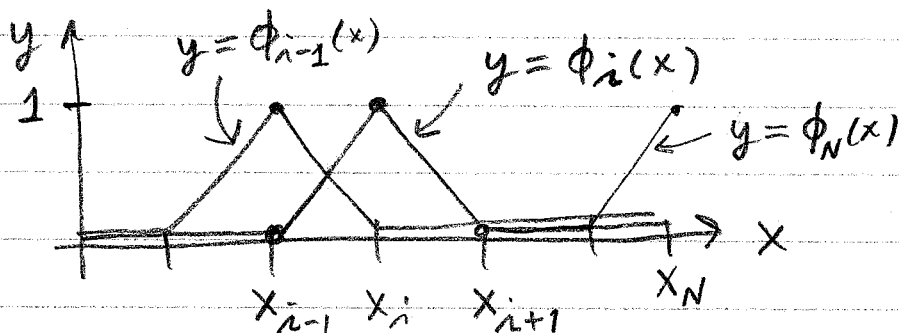
av längd $h_i = x_i - x_{i+1}$.



En kontinuerlig styckvis linjär funktion $U(x)$ är entydigt bestämd

av sina nodvärden $U_i = U(x_i)$.

För att beskriva $U(x)$ inför vi basfunktionerna $\phi_i(x)$, en för varje nod.



Funktionerna ϕ_i bestäms av att de är kontinuerliga styckvis linjära samt att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Funktionen $U(x)$ kan nu skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x), \text{ med } U_i = U(x_i).$$

Obs att
$$U(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i \underbrace{\phi_i(x_j)}_{\substack{=1 \text{ om } i=j \\ =0 \text{ om } i \neq j}} = U_j.$$

Vi har nu en formel som uttrycker $U(x)$ i nodvärdena.

Vi ska bestämma de okända nodvärdena U_i så att $U(x)$ blir en approximativ lösning till rand-

värdesproblemet. Vi använder den svaga formuleringen:

$$\int_0^L a D u D v dx + k_L u(L) v(L) + k_0 u(0) v(0) = \int_0^L f v dx + k_L u_L v(L) + k_0 u_0 v(0)$$

för alla v .

Vi sätter in $U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$ och $v = \phi_j$.

För enkelhets skull genomför vi detta för fallet med $k_0 = k_L = 0$, $g_0 = g_L = 0$.

Vi får

$$\sum_{i=1}^N U_i \int_0^L a D \phi_i D \phi_j dx = \int_0^L f \phi_j dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Med
$$a_{ij} = \int_0^L a D \phi_i D \phi_j dx = \int_0^L a D \phi_j D \phi_i dx = a_{ji}$$

$$b_j = \int_0^L f \phi_j dx$$

kan vi skriva

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N$$

dvs på matrisform: $AU = b$.

Detta är ^{ett linjärt system av} N ekv. för N obekanta.

Matrisen $A = \left\{ \int_0^L a D\phi_i D\phi_j dx \right\}_{i,j=1}^N$

kallas styvhetmatris (stiffness matrix). Jämför med stängens ekv där $a = EA$ är styvhet.

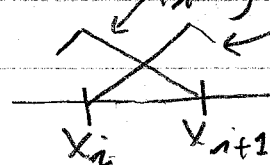
Styvhetmatrisen är symmetrisk, $a_{ij} = a_{ji}$, och tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} \diagdown & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & \diagdown \end{bmatrix}, \text{ dvs } a_{ij} = 0 \text{ utom} \\ \text{då } j = i-1, i, i+1.$$

Vektorn $b = \left\{ \int_0^L f \phi_j dx \right\}_{j=1}^N$

kallas lastvektor (load vector).

Intervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$ tillsammans med sina två basfunktioner ϕ_i, ϕ_{i+1} kallas ett finit element.



Ekvationssystemet $AU = b$

kan enkelt ställas upp och lösas i ett datorprogram,

till exempel `MyPoissonSolver.m`

i Datorövning 4.

Programmet löser mer allmänna problem av formen

$$\begin{cases} -D(aDu) + dDu + cu = f & \text{i } I \\ aD_n u + k(u - u_A) = g & \text{i } x=0, x=L \end{cases}$$

där vi även har en konvektionsterm dDu , en reaktionsterm cu , och ett förestorivet inflöde med hastigheten

$g = g_0$, $g = g_L$ $\left[\frac{J}{m^2 s} \right]$ i $x=0$, respektive $x=L$.

Randvillkoret $u = u_A$ ($k = \infty$) hanteras genom att ta k lika med ett stort tal, $k = 10^8$.

Övningar

Bestäm den svaga formuleringen av följande randvärdesproblem, 1.1-1.3.

FEM 1.1 (stång)

$$\begin{cases} -D(EA D u) = K_x A & \text{i } I \\ u(0) = 0, \quad EA D u(L) = P \end{cases}$$

Tips: $v(0) = 0$.

FEM 1.2

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{i } I \\ -u'(0) + u(0) = g_0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

Tips: $v(L) = 0$.

FEM 1.3 (balk)

$$\begin{cases} D^2(EI D^2 w) = q \\ w(0) = w(L) = 0 \\ D^2 w(0) = D^2 w(L) = 0 \end{cases}$$

Tips: $v(0) = v(0)$

(17)

Lös följande randvärdesproblem genom upprepad integration.

FEM 1.4
$$\begin{cases} -u'' = 1 & i(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

FEM 1.5
$$\begin{cases} -D((1+x)Dm) = 2x & i(0,1) \\ -Dm(0) + m(0) = 0, \quad m(1) = 3/2 \end{cases}$$

FEM 1.6
$$\begin{cases} -D(a Dm) = 0 & i(0,L) \quad (a = \text{konstant}) \\ m(0) = m_0, \quad m(L) = m_L \end{cases}$$

Beräkna även värmeflödeshastigheten $j = -a Dm$.

FEM 1.7
$$\begin{cases} D^2(EI D^2w) = q & i(0,L) \\ w(0) = w(L) = 0 \\ D^2w(0) = D^2w(L) = 0 \end{cases}$$

med EI och q konstanta.

FEM 1.8
$$\begin{cases} -a u'' + u' = 1 & i(0,1) \quad (a = \text{konst.} > 0) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Tips: $u' - \frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}(x+c)$, integr. faktor $e^{-x/a}$.

gvar. 1.1 $\int_0^L EA DM Dv dx = \int_0^L K_x A v dx + P v(L)$ för
alla v med $v(0) = 0$.

1.2 $\int_0^L m' v' dx + m(0) v(0) = \int_0^L f v dx + g_0 v(0)$ för alla v med $v(L) = 0$

1.3 $\int_0^L EI D^2 w D^2 v dx = \int_0^L q v dx$ för alla v med
 $v(0) = v(L) = 0$

1.4 $m(x) = x(L-x)/2$

1.5 $u(x) = -\frac{1}{2} x^2 + x + 1$

1.6 $u(x) = (u_L - u_0) \frac{x}{L} + u_0, \quad j = (u_0 - u_L) \frac{a}{L}$

1.7 $w(x) = \frac{1}{24} \frac{q L^4}{EI} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right)$

1.8 $u(x) = x - \frac{e^{x/a} - 1}{e^{1/a} - 1}$