FÖ 4.3 (2007-08)

Vi har introducerat randvärdes-problemet

$$\begin{cases} -D(aDu) = f & i\ I \\ aD_n u + k(u-u_A) = g & i\ x=0,\ x=L \end{cases}$$

och dess svaga formulering.

Exempel

$$\begin{cases} -D\big((1+x^2)Du\big) = 1, & x \in (-1,1) \\ \underbrace{u(-1)=0}_{k=\infty,\ u_A=0}, & \underbrace{Du(1)=0}_{k=0,\ g=0} \end{cases}$$

a) Skriv ned den svaga formuleringen.

b) Lös problemet genom att integrera två gånger.

Lösning. a) Randvillkoret $u(-1)=0$ kräver att vi tar $\overbrace{v}^{\text{testfunktionen}}$ sådan att $v(-1)=0$. Multiplicera med v och integrera:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot v(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} D\Big((1+x^2)Du(x)\Big)v(x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integr.}\end{matrix}\right\}$$

D flyger över

$$= -\Big[(1+x^2)Du(x)v(x)\Big]_{x=-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1+x^2)Du(x)Dv(x)\,dx$$

$$= -2\underbrace{Du(+1)v(+1)}_{=0} + 2\,Du(-1)\underbrace{v(-1)}_{=0} + \int_{-1}^{1}(1+x^2)Du(x)Dv(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(1+x^2)u'(x)v'(x)\,dx$$

Svag formulering: Finn $u = u(x)$ sån att $u(-1)=0$ och

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\,v'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} v(x)\,dx$$

för alla v med $v(-1)=0$.

b) Ekv är: $D\Big((1+x^2)Du(x)\Big) = -1$

Integrera: $(1+x^2)Du(x) = -x + C$

$$Du(x) = \frac{-x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}$$

Integrera: $u(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,\mathrm{atan}\,x + D$

Randvillkoren ger:

$$\Big(0 = u(-1) = -\tfrac{1}{2}\ln(2) + C\,\mathrm{atan}(-1) + D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = \frac{1}{2}\ln(2) + C\,\mathrm{atan}(1) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Alltså:

$$u(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathrm{atan}(x) + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$= \mathrm{atan}(x) + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}$$

Kontroll: $u(-1) = \mathrm{atan}(-1) + \frac{\pi}{4} + \ln(1) = 0$

$$u'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$u'(+1) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$(1+x^2)\,u'(x) = -x + 1$$

$$D\Big((1+x^2)\,Du\Big) = -1 \qquad \text{O.K.}$$

Fortsätter med:
Finita elementmetoden enligt
Fö 4.2

Repetition: Partiell integration

(Adams 6.1)

För obestämd integral (primitiv funktion):

$$\int U(x)\,DV(x)\,dx = U(x)V(x) - \int DU(x)\,V(x)\,dx$$

För bestämd integral:

$$\int_a^b U(x)\,DV(x)\,dx = \Big[U(x)V(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b DU(x)\,V(x)\,dx$$

Lägg denna formel på minnet! Mycket viktig.
Obs hur derivatan D "flyger" över från V till U och att insättnings termen UV inte har någon derivata.

Bevis: Produktderivering:

$$D(UV) = DU\,V + U\,DV$$

Integrera:

$$UV = \int DU\,V\,dx + \int U\,DV\,dx$$

$$\int U\,DV\,dx = UV - \int DU\,V\,dx \qquad \square$$