

FÖ 5.1 (2007-08)

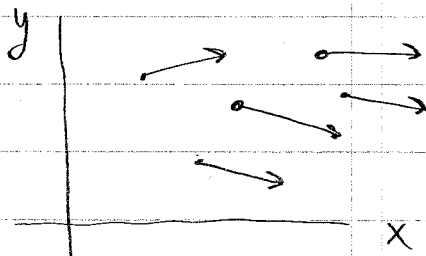
15.1 Vektorfält

Vektorfält i rummet:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \vec{i} + F_2(x, y, z) \vec{j} + F_3(x, y, z) \vec{k}$$

Vektorfält i planet:

$$\vec{F}(x, y) = F_1(x, y) \vec{i} + F_2(x, y) \vec{j}$$



(I varje punkt sitter en pil.)

Skalärt fält: $f(x, y, z)$

exempel • hastighetsfält i strömning

$$\vec{v}(x, y, z)$$

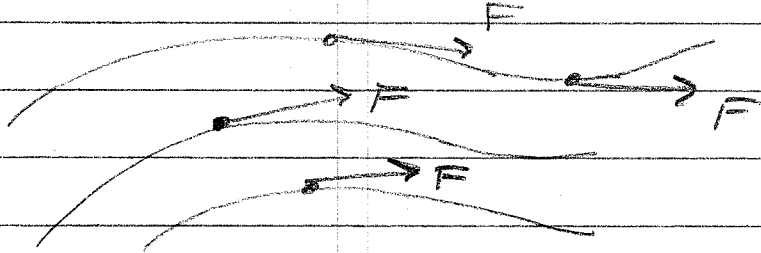
• temperaturgradient

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

• kraftfält $\vec{F}(x, y, z)$

Fältlinjer (strömlinjer, kraftlinjer)

Dessa är kurvor sådana att $\vec{F}(x, y, z)$ är tangent till den kurvan som går genom (x, y, z) .



En sådan kurva

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

ges av att $\frac{d\vec{r}}{dt}$ är parallell med $\vec{F}(\vec{r}(t))$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda(t) \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Eliminera $\lambda(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t) F_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = \lambda(t) F_3(x, y, z) \end{cases}$$

$$\lambda(t) dt = \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

(3)

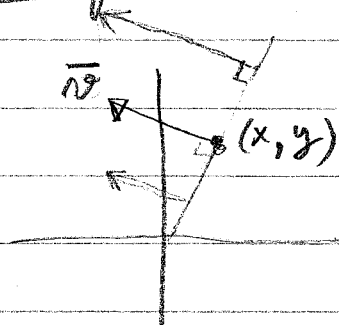
dvs $\frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$

Om man kan separera variablerna
dvs skriva på formen

$$P(x)dx = Q(y)dy = R(z)dz$$

så kan man bestämma
flödeslinjerna genom att
integrera.

Exempel $\vec{v}(x,y) = \Omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$



$$|\vec{v}| = \Omega \sqrt{y^2 + x^2} = \Omega r$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Hastighetsfältet för stelkropps-
rotation. Flödeslinjerna
ges av

$$\frac{dx}{-2y} = \frac{dy}{2x} \quad \text{dvs} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

Separera variablerna:

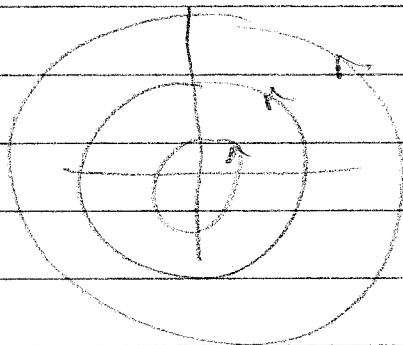
$$x dx = -y dy$$

Integrera:

$$\frac{1}{2} x^2 = -\frac{1}{2} y^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Cirklar med centrum i origo.



15.2 Konservativa fält

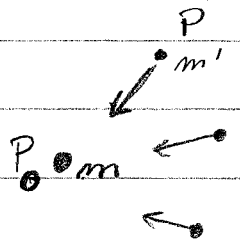
(endast sid 811-813)

Definition Om $\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z)$

i D så är $\vec{F}$ ett konservativt
vektorfält i D och funktionen
 ϕ kallas potential till $\vec{F}$.

Exempel Gravitationsfält

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gmm' \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$



$$|\vec{F}(\vec{r})| = -Gmm' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

Kraften på massan m' i P som
hör sig kring den fixa massan
 m i P_0 .

I mekaniken (och ellära) skriver man
 $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, så att kraften pekar dit potential minskar.

Potentialen är

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Gmm'}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Beweis: Vi beräknar $\vec{\nabla}\phi$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = Gmm' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} =$$

$$= Gmm' \frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \frac{\partial}{\partial x} |\vec{r}-\vec{r}_0|$$

När är

$$\frac{\partial}{\partial x} |\vec{r}-\vec{r}_0| = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\quad}} 2(x-x_0) = \frac{x-x_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

så att

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -Gmm' \frac{x-x_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = F_1$$

På samma vis:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -Gmm' \frac{y-y_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = F_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -Gmm' \frac{z-z_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = F_3$$

□

Nödvändigt villkor för att $\vec{F}$
ska vara konservativt i D

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

$$\text{dus} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{i } D$$

På samma vis

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{i } D$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{i } D$$

Dessa är nödvändiga men inte

tillräckliga. Vi ska se i (16.2 Sats 4)

att vi måste lägga till ett villkor

på D för att garantera att

$\vec{F}$ är konservativt.

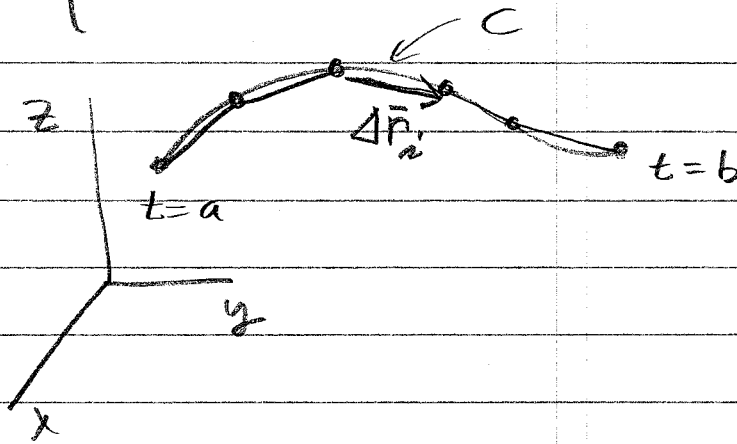
15,3

KurvintegralKurva C på parameterform:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

eller

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I = (a, b)$$



$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) |\Delta \vec{r}_i|$$

$$= \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \left| \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

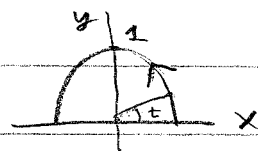
båglängds-elementet $ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

Exempel Beräkna $\int_C y \, ds$ där

9

C är övre halvan av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.



Lösning. 1) Parametrisera C :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Tangent: $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$

Båglängds-
element: $ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

$$= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$$

$$\int_C y \, ds = \int_0^\pi \sin t \, dt = \left[-\cos t \right]_0^\pi = 2$$

2) En annan parametrisering: $t = x$

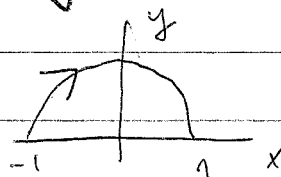
$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

Tangent: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{j}$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{1 + \left(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \right)^2} dt$$

$$= \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_C y \, ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 dt = 2.$$



Viktigt: $\int_C f ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$ (10)

är oberoende av parametriseringen,
dvs alla parametriseringar av C
ger samma resultat.

Vi bevisar inte detta.

Men vi såg att det stämmer
i föregående exempel.

Kurvan C och $\int_C f ds$ har
ingen riktning i sig själv.
Men när vi valt en parametri-
sering så genomlöps kurvan
i en viss riktning som
bestäms av parametriseringen.
Se föregående exempel.