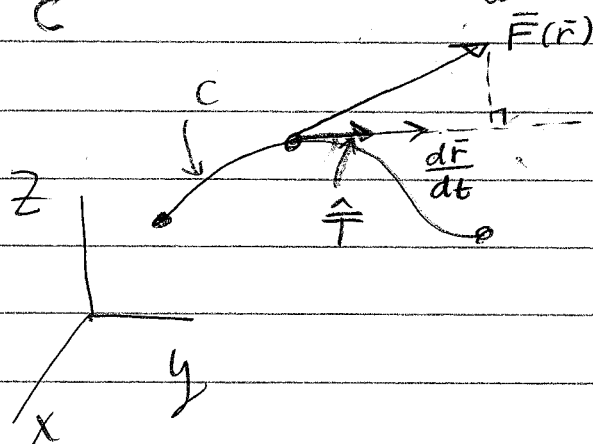


Tangentkurvintegral

U

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$



Obs att

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\hat{T}} \underbrace{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt}_{ds}$$

$$= \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

där $\vec{F} \cdot \hat{T}$ är skalära projektionen

av $\vec{F}$ på tangentriktningen.

Vektorbåglängdselementet: $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

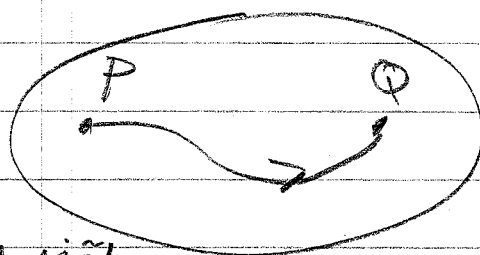
Exempel $\vec{F}$ kraftfält. Arbetet som utföras då en partikel rör sig längs C i kraftfältet $\vec{F}$ är

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

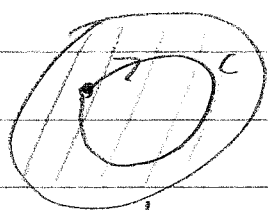
D är ett sammanhängande område
(i rummet eller planet) om
varje par av punkter P, Q i D
kan förbindas med en kurva
i D .

C sluten = 

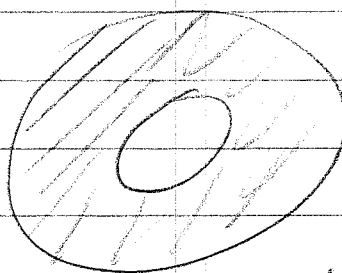
C enkel = korsar inte sig själv



D är enkelt sammanhängande
om varje enkel sluten kurva
i D kan krympas till en
punkt utan lämna D .

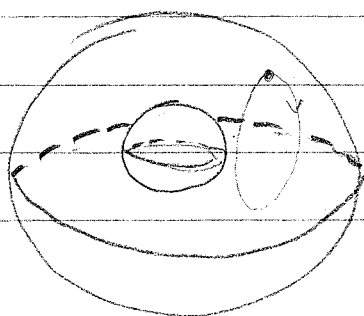


enkelt
sammanhängande



hålstigma
i planet

sammanhängande
men ej enkelt



klot med hål i rummet
är enkelt sammanhängande

Sats 1 (oberoende av vägen)

(3)

Antag D är enkelt sammanhängande och $\vec{F}$ ett vektorfält i D .

Då är följande påståenden ekvivalenta.

a) $\vec{F}$ är konservativt i D

b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje slutna kurva C i D

c) För varje par av punkter P_0, P_1 i D har $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ samma värde för alla kurvor C i D från P_0 till P_1 .

Vi bevisar endast att $a) \Rightarrow c)$.

Antag då att $a)$ är sant, dvs $\vec{F} = \nabla \phi$ i D .

Tag kurva C i D från P_0 till P_1 .

$$\therefore \text{Då blir } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla \phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \quad (4)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) dt = \left[\phi(\vec{r}(t)) \right]_{t=a}^b =$$

$$= \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

dvs den beror bara av ändpunkterna
men inte C .

Tycka till sidan 5!

Exempel Graf $z = f(x, y)$.

Välj parametrar $u = x$, $v = y$.

Parametrisering:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

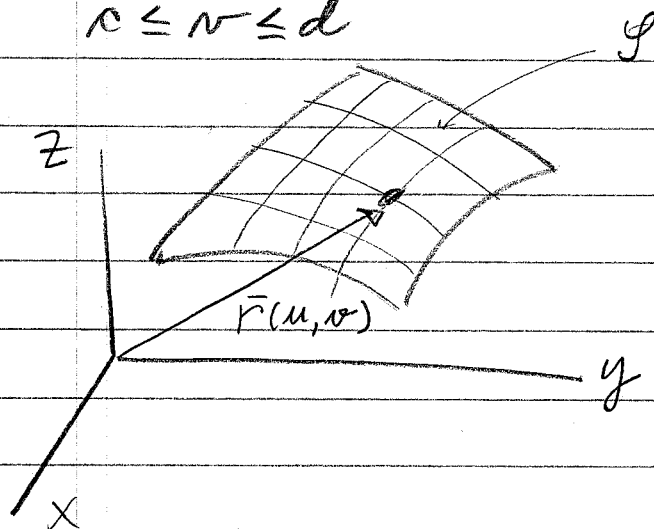
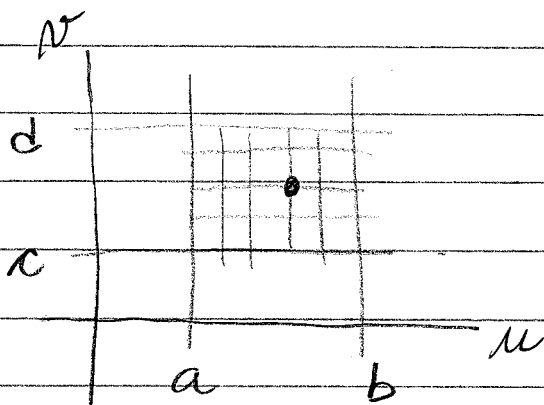
15,5 ytintegral. (endast sid 832-837) (5)

Yta $\mathcal{S}$ på parameterform:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

eller

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d \end{array}$$



exempel Sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

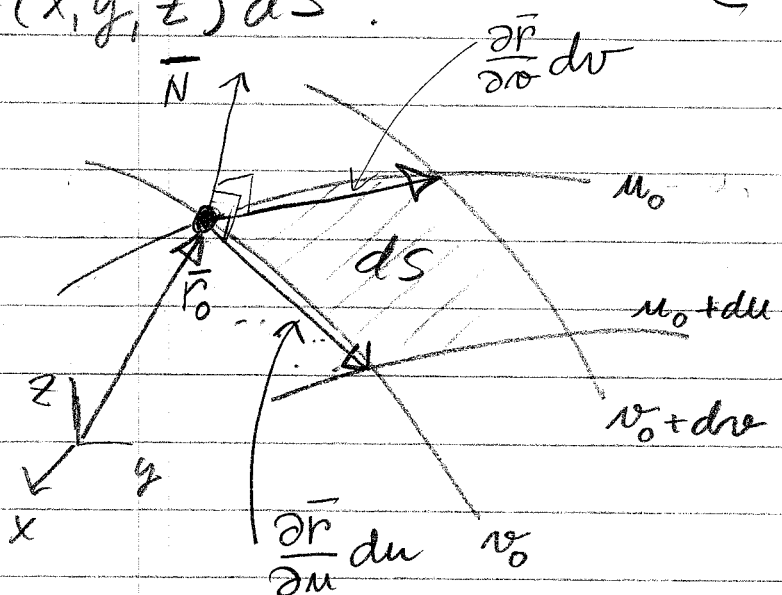
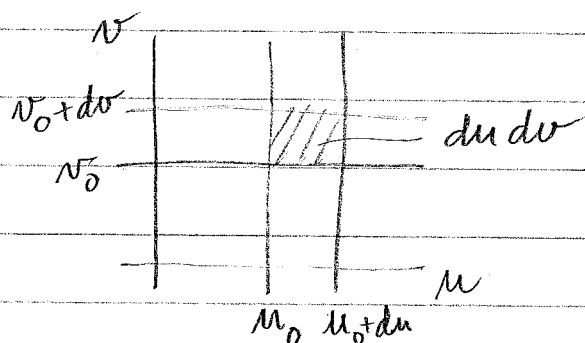
I sfäriska koordinater: $\begin{cases} \rho = R \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

Parametrisering:

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}$$

exempel Graf se sid 4.

ytaintegral $\iint_S f(x, y, z) dS$.



Areaelementet:

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Obs att $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ och $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$

är tangenter till koordinatkurvorna

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v_0), \quad a \leq u \leq b$$

$$\bar{r} = \bar{r}(u_0, v), \quad c \leq v \leq d$$

De är då också tangenter till ytan S i punkten $\bar{r}_0 = \bar{r}(u_0, v_0)$.

En normalvektor:

$$\bar{N} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Exempel Graf: $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Tangenten: $\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{i} + 0\vec{j} + f'_x(u, v)\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0\vec{i} + \vec{j} + f'_y(u, v)\vec{k} \end{cases}$

Normalvektor

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = f'_y \vec{i} - f'_x \vec{j} + \vec{k}$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} du dv$$

oder $dS = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy$

Exempel Kfären

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R \cos \phi \cos \theta \vec{i} + R \cos \phi \sin \theta \vec{j} - R \sin \phi \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -R \sin \phi \sin \theta \vec{i} + R \sin \phi \cos \theta \vec{j} + 0 \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta & -R \sin \phi \\ -R \sin \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \vec{i} + R^2 \sin^2 \phi \sin \theta \vec{j} +$$

$$+ (R^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + R^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta) \vec{k}$$

= 1

$$= R \sin \phi (R \sin \phi \cos \theta \vec{i} + R \sin \phi \sin \theta \vec{j} + R \cos \phi \vec{k})$$

$$= R \sin \phi \vec{r}$$

$$dS = |R \sin \phi \vec{r}| d\phi d\theta = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

Har vi ihåg $dV = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$. $\left\{ \begin{matrix} r = R \\ dr = 0 \end{matrix} \right\}$

15.6

Flödesintegral

En yta är orienterbar om det finns en normalvektor $\bar{N}(P)$

som varierar kontinuerligt när P rör sig på ytan.

(Möbius band är ej orienterbar.)

Om S är orienterbar så

definieras vi flödesintegralen
(normalytintegralen) ("flux")

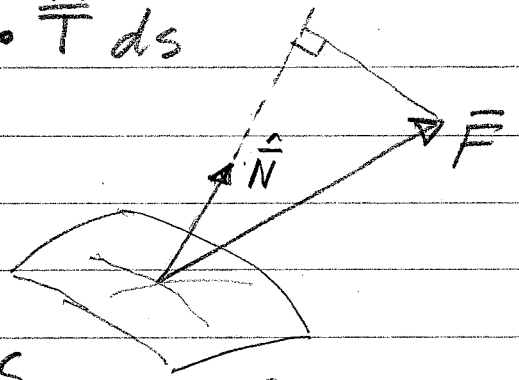
$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot \hat{\bar{N}} \, dS$$

$$\left(\text{Jämför: } \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_C \bar{F} \cdot \hat{\bar{T}} \, ds \right)$$

$\bar{F} \cdot \hat{\bar{N}} = \text{skalära proj.}$

Hastighetsfält: $\iint_S \underbrace{\bar{v}}_{\frac{m}{s}} \cdot \underbrace{\hat{\bar{N}}}_{\frac{1}{m^2}} \, dS = \frac{m^3}{s}$

volymflödeshastighet



$$\iiint_V \underbrace{\rho}_{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \underbrace{\vec{v} \cdot \hat{\vec{N}}}_{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \underbrace{dS}_{\text{m}^2} = \text{massflödes hastighet}$$
$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$