

(9)

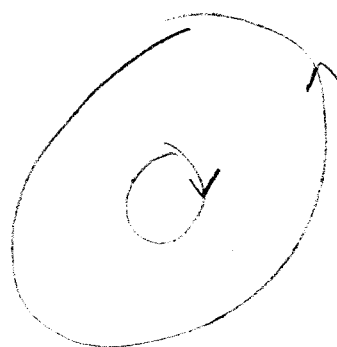
FÖ 7.2 (Endast Sats 10, utan bevis.)

Vi har:

Fundamentalsatsen: $\int_a^b Df(x) dx = [f(x)]_a^b$

Greens formel i planet:

$$\iint_R \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$



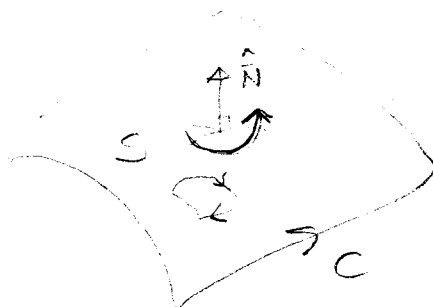
Gauss divergenssats:

$$\iint_R \nabla \cdot \vec{F} dA = \oint_C \vec{F} \cdot \hat{N} ds$$

$$\iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

16.5 Sats 10 (Stokes sats)

Antag att S är en orienterad yta med enhetsnormalvektorfält $\hat{N}$ vars rand C är positivt orienterad i förhållande till S och



består av enkla slutna kurvor

Antag att $\vec{F}$ är deriverbar i en omgivning av S . Då gäller

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Man bevis.

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ är cirkulationen av $\vec{F}$ längs C .

Satsen innebär att $\nabla \times \vec{F} \cdot \hat{N}$ är en slags cirkulationstäthet av $\vec{F}$ på S .

16.6 Endast Kontinuitetsekvationen

sid 879-878.

Strömning av fluid (gas eller vätska).

$\delta(x, y, z, t)$ densitet $[\text{kg}/\text{m}^3]$

$\vec{v}(x, y, z, t)$ hastighet $[\text{m}/\text{s}]$

Totala massan i volymen D :

$$m(t) = \iiint_D \delta \, dV \quad [\text{kg}]$$

Utflödet genom randen S :

$$\iint_S \delta \vec{v} \cdot \hat{\vec{N}} \, dS \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{m}^2 = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

Konservering av massa: $\frac{dm}{dt} = \text{inflödet}$

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \delta \, dV = - \iint_S \delta \cdot \vec{v} \cdot \hat{\vec{N}} \, dS \quad [\text{kg}/\text{s}]$$

Divergenssatsen:

$$\iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t} \, dV = - \iiint_D \nabla \cdot (\delta \vec{v}) \, dV$$

(4)

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{v}) \right) dV = 0$$

Gäller för alla D .

Alltså

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{v}) = 0$$

Detta är kontinuitetskvationen,
en viktig PDE strömningsläran.

Inkompressibel fluid (vätska):

$$\delta(x, y, z, t) = \text{konstant.}$$

Då blir kontinuitetskvationen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Hastighetsfältet är divergensfritt.