

bild 1

Linjär Algebra M/TD Läsvecka 1

Omfattning: Lay, kapitel 1.1-1.9, Linjära ekvationer i linjär algebra

Innehåll:

Olika aspekter av linjära ekvationssystem:

skärning mellan geometriska objekt,
linjärkombination av vektorer,
matrisekvation,
linjär avbildning.

bild 2

Mål:

Att behärska eliminationsmetoden.

Att förstå varför metoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.

Att förstå hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.

Att kunna tillämpa metoden i nya situationer och med variation i tolkningen.

bild 3

Elementära radoperationer

1. **Addition** Ersätt en rad med summan av raden och en multipel av en annan rad.
2. **Platsbyte** Låt två rader byta plats
3. **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en rad med en konstant $\neq 0$

bild 4

Två fundamentala frågor om ekvationssystem

1. Är systemet konsistent, *existerar* någon lösning.
2. Om det finns minst en lösning, är den i så fall *unik*, *entydig*.

bild 5

Exempel 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{array} \right]$$

Exempel 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

bild 6

Exempel 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Exempel 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

bild 7

Viktiga begrepp

Trappstegsform (echelon form)

Reducerad trappstegsform (reduced row echelon form, rref)

Pivot position, pivot kolonn

bild 8

Viktiga begrepp

Kolonnvektor

Linjärkombination, Linjärt hölje (span)

Linjärt beroende, Linjärt oberoende

Linjär avbildning

bild 9

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är n -tupler av reella tal, $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ eller skrivna som kolonnmatriser,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller som vektorer i planet respektive rummet där vi utgår från en ON-bas.

bild 10

Addition och subtraktion av vektorer samt multiplikation med skalär sker ”koordinatvis”.

Exempel:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\mathbf{u} = (-1) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ -u_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{u}$$

bild 11

Vanliga räknelagarna gäller.

För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalärer c och d gäller:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

bild 12

En *linjärkombination* av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p$ med vikterna $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$ är vektorn $\mathbf{y}$ som ges av:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

bild 13

Vektorekvationen

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \cdots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

bild 14

Mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$ kallas *linjära höljet* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$ eller delmängden av $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$.

Linjära höljet betecknas $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p\}$

bild 15

Matrismultiplikation:

Låt A vara $m \times n$ -matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ där kolonnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Då är produkten $A\mathbf{x}$ linjärkombinationen av kolonnerna i A med vikterna $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$= x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

bild 16

Matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har samma lösningar som vektorekvationen

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

som i sin tur har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

bild 17

Sats 4

Låt A vara en $m \times n$ matris. Då är följande utsagor logiskt ekvivalenta. a. För varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.

b. Varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är linjärkombination av kolonnerna i A .

c. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$

d. A har pivotposition i varje rad.

bild 18

Sats 5 Om A är en $m \times n$ -matris, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, och c är en skalär, så gäller:

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

och

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

bild 19

Den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning om och endast om ekvationen har minst en fri variabel.

bild 20

Sats 6

Antag att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent för ett visst högerled $\mathbf{b}$ och låt $\mathbf{p}$ vara en lösning. Då är ekvationens lösningsmängd alla vektorer på formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{v}_h$ är lösning till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

bild 21

Mängden av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt oberoende* om och endast om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har trivial lösning.

Mängden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt beroende* om och endast om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har icke-trivial lösning. Alltså om och endast om det finns vikter $c_1, c_2, \dots, c_p$, som inte alla är noll, men så att

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

bild 22

Kolonnerna i en matris A är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning.

bild 23

Sats 7

En mängd som består av två eller fler vektorer

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p\}$$

är linjärt beroende om och endast om minst en av vektorerna är en linjärkombination av de övriga.

bild 24

Sats 8

Varje mängd

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p\}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^n$, där p är större än n är linjärt beroende.

bild 25

En **funktion** eller **transformation** eller **avbildning** T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som till varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^n$ kallas funktionens *definitionsomängd* eller *domän*.

$\mathbb{R}^m$ kallas funktionens *codomän*.

Beteckningen $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ läses ” T är en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ ”.

bild 26

Om A är en $m \times n$ -matris så ger varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ en vektor $A\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$.

Vi har således en avbildning

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Vi kan också skriva

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ges av $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

bild 27

En avbildning T kallas *linjär* om

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i T :s domän.

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}$ i T :s domän och alla skalära c .

bild 28

Matrismultiplikation har följande egenskaper

(i) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i T :s domän.

(ii) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}$ för vilka produkten är definierad och alla skalära c .

bild 29

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

är en linjär avbildning.

bild 30

Sats 10. Matrisen till en linjär avbildning.

Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns en unik matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$

Om $\mathbf{e}_j$ är den j :te kolonnen i enhetsmatrisen I_n och $\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j)$ så är $A =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

bild 31

Definition: En avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas *surjektiv* eller *på* om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av minst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Värdemängden är hela $\mathbb{R}^m$.

bild 32

Definition: En avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas *injektiv* eller *en-entydig* om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av högst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

bild 33

Sats 11 Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är T injektiv om och endast om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen.

Mängden $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ kallas *kärnan* till T eller *nollrummet* till T , skrivs $\ker(T)$ eller $\text{Nul}(T)$.

Vi har alltså att T är injektiv om och endast om $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$

bild 34

Sats 12 Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T . Då gäller:

- a T är *surjektiv*, alltså avbildar $\mathbb{R}^n$ *på*, *onto* $\mathbb{R}^m$ om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.
- b T är *injektiv*, *en-entydig*, *one-to-one* om och endast om kolonnerna i A är linjärt oberoende.