

TMV166/186
Linjär Algebra M/TD
2009/2010
Läsvecka 1

Omfattning

- Lay, kapitel 1.1-1.9, Linjära ekvationer i linjär algebra

Innehåll

Olika aspekter av linjära ekvationssystem

- skärning mellan geometriska objekt
- linjärkombination av vektorer
- matrisekvation
- linjär avbildning.

1.1 Linjära ekvationssystem

Viktiga begrepp

- Lösning till ekvationssystem, ekvivalens
- Totalmatris, utökad matris (till ett ekvationssystem)
- Elementär radoperation, radekvivalens
- Konsistent ekvationssystem
- Inkonsistent system

Mål 1.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- lösa linjära ekvationssystem med eliminationsmetoden

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär

Exempel 1

Ett linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Elementära radoperationer

- **Addition** Ersätt en ekvation med summan av den ekvationen och en multipel av en annan ekvation.
- **Platsbyte** Låt två ekvationer byta plats.
- **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en ekvation med en konstant (utom 0).

Observation:

- Elementära radoperationer är reversibla.
- Man återfår "det gamla" ekvationssystemet genom en elementär radoperation på "det nya".
- De två systemen kallas **radekvivalenta**.
- **Sats** Radekvivalenta ekvationssystem har samma lösningsmängder, de är alltså **ekvivalenta**

Vi skriver $\text{ES1} \Leftrightarrow \text{ES2}$.

Exempel 1

Totalmatrisen (den utökade matrisen) till det linjära ekvationssystemet i exempel 1 är:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Elementära radoperationer på matriser

- **Addition** Ersätt en rad med summan av raden och en multipel av en annan rad
- **Platsbyte** Låt två rader byta plats
- **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en rad med en konstant (utom 0)

Radekvivalens

- Matriser som erhålls ur varandra genom radoperationer kallas **radekvivalenta**.

Vi skriver $\mathbf{M}_1 \sim \mathbf{M}_2$

- Radekvivalenta totalmatriser hör till ekvivalenta ekvationssystem.

Två fundamentala frågor om ekvationssystem

- Är systemet konsistent, *existerar* någon lösning?
- Om det finns minst en lösning, är den i så fall *unik, entydig*?

En viktig del i kursen är att förstå vad dessa frågor betyder i olika situationer och att kunna besvara dem.

1.2 Radreduktion och trappstegsform

Viktiga begrepp

- Trappstegsform (echelon form)
- Reducerad trappstegsform (reduced row echelon form, rref)
- Pivot position, pivot kolonn
- Fri variabel
- Bunden variabel

Mål 1.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- förklara hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
- använda sats 1.2.2 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga ytterligare mål i detta avsnitt

En matris har trappstegsform om:

- Under en rad med bara nollor finns inget annat än nollor.
- Det första nollskilda elementet i varje rad är till höger om det första nollskilda elementet i raden ovanför.
- Under det första nollskilda elementet i en rad (och under nollorna till vänster om detta element) finns endast nollor.

En matris har (rad)reducerad
trappstegsform om

Den är i trappstegsform och dessutom

- Alla pivotelement är 1.
- Över pivotelementen finns bara nollor.

Vilka av matriserna är i
trappstegsform?
Reducerad trappstegsform?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats 1: Den reducerade trappstegsformens entydighet

Varje matris är radekvivalent med en och endast en (exakt en) reducerad trappstegsmatris.

(Detta är inte alls självklart, beviset kräver en del begrepp och resonemang som dyker upp senare i kursen.

Definition

Om matrisen A är radekvivalent med den reducerade trappstegsmatrisen E så kallas en position i A för **pivotposition** om elementet där svarar mot ett pivotelement i E .

En kolonn i A som innehåller en pivotposition kallas en **pivotkolonn**.

Notera att pivotpositionerna inte är entydigt bestämda men att pivotkolonnerna är det.

Sats 2: Existens och entydighet för lösningar till linjära ekvationssystem.

Ett linjärt ekvationssystem är **konsistent** (har lösning) om och endast om den **högra kolonnen i totalmatrisen inte är en pivotkolonn**.

Detta är samma som att trappstegsformen inte innehåller en rad av typen

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{där } b \neq 0$$

Ett konsistent system har **unik lösning** om och endast om **alla kolonner utom den högra i totalmatrisen är pivotkolonner**.

1.3 Vektorekvationer

Viktiga begrepp

- Kolonnvektor
- Linjärkombination
- Linjärt hölje (span)

Mål 1.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med en vektorekvation

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \cdots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- avgöra om en vektor är *linjär kombination* av givna vektorer
- **För högre betyg skall du dessutom kunna:**
- redogöra för begreppet *linjär kombination*

Rummet $\mathbb{R}^n$.

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är n -tupler av reella tal

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

eller skrivna som kolonnmatriser

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter
eller som vektorer i planet respektive rummet
där vi utgår från en ON-bas.

Addition och subtraktion

Addition och subtraktion av vektorer samt multiplikation med skalär sker "koordinatvis".

Exempel:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{bmatrix}$$
$$(-1)\mathbf{u} = (-1) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ -u_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{u}$$

Vanliga räknelagarna gäller

- För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och alla skalärer c och d gäller

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Linjärkombination

En *linjärkombination* av vektorerna

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p$$

med vikterna

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$$

är vektorn $\mathbf{y}$ som ges av

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

Vektorekvation -- ekvationssystem

- Vektorekvationen

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \cdots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- har samma lösningar som ekvationssystemet
vars totalmatris är

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{b} \end{array} \right]$$

Linjära höljet - Linear Span

- Mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p$

kallas *linjära höljet* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p$

eller

delmängden av $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p$

Linjära höljet betecknas $\text{Span}\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \}$

Linjärkombination = lösning till ES.

$$\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p\}$$

om och endast om

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{b}$$

har minst en lösning.

1.4 Matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Viktig operation

- Multiplikation matris • kolonnvektor

Mål 1.4

För betyget godkänd skall du kunna:

- förklara hur ett ekvationssystem hänger samman med matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- använda sats 1.4.4 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 1.4.4

Matrismultiplikation

- Låt A vara $m \times n$ -matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$
- där kolonnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$

Då är produkten $A\mathbf{x}$ linjärkombinationen av kolonnerna i A med vikterna $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \end{aligned}$$

Sats 1.4.3

- Matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- har samma lösningar som vektorekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

- som i sin tur har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{array} \right]$$

Sats 1.4.4

Låt A vara en $m \times n$ -matris. Då är följande utsagor logiskt ekvivalenta.

- a) För varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.
- b) Varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är linjärkombination av kolonnerna i A .
- c) Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$
- d) A har pivotposition i varje rad.

Sats 1.4.5

Om A är en $m \times n$ -matris, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, och c är en skalär, så gäller:

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

och

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

Multiplikation med matris är linjär

1.5 Lösningsmängder

Viktiga begrepp

- Homogen ekvation
- Trivial lösning
- Icke-trivial lösning

Mål 1.5

För betyget godkänd skall du kunna:

- skriva lösningsmängden till ett ekvationssystem på vektorform

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 1.5.6

Fundamental observation

Den homogena ekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har **icke-trivial lösning** om och endast om
ekvationen har minst en **fri variabel**

Sats 1.5.6

Antag att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent för ett visst högerled $\mathbf{b}$ och låt $\mathbf{p}$ vara en lösning.

Då är ekvationens lösningsmängd alla vektorer på formen

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$$

där $\mathbf{v}_h$ är lösning till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

1.6 Tillämpningar

Viktiga begrepp

- Inga nya begrepp i detta avsnitt.
- Kapitlet ingår inte i kursen, men väl värt att läsa kursivt. Eventuellt tas något exempel upp som illustration.

Mål 1.6

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga godkäntmål i detta avsnitt

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga överbetygsmål i detta avsnitt

1.7 Linjärt oberoende

Viktiga begrepp

- Linjärt oberoende
- Linjärt beroende

Mål 1.7

För betyget godkänd skall du kunna:

- avgöra om en given mängd av vektorer är *linjärt beroende* eller *linjärt oberoende*.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- redogöra för begreppen *linjär kombination*, *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*
- förklara hur begreppen ovan hänger samman med egenskaper hos ekvationssystem, matrisekvationer och vektorekvationer
- bevisa sats 1.7.8 och 1.7.9

Linjärt oberoende

Mängden av vektorer $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \}$
i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt oberoende* om och
endast om
vektorekvationen

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + \dots + x_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har trivial lösning.

Linjärt beroende

Mängden av vektorer $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt beroende* om och endast om vektorekvationen

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + \dots + x_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

även har icke-trivial lösning.

Alltså om och endast om det finns vikt
 $c_1, c_2, \dots, c_p$, som inte alla är noll, men så
att $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$

Fundamental observation

Kolonnerna i en matris A är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning.

Sats 1.7.7

En mängd som består av två eller fler vektorer

$$\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \}$$

är linjärt beroende om och endast om
minst en av vektorerna är en
linjärkombination av de övriga.

Man kan inte veta på förhand vilken/vilka
detta är.

Sats 1.7.8

Varje mängd

$$\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^n$, där p är större än n
är linjärt beroende.

Sats 1.7.9

Om en mängd vektorer

$$\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p \} \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^n$$

innehåller nollvektorn,

så är mängden linjärt beroende.

1.8 Linjära transformationer

Viktiga begrepp

- Transformation, avbildning
- Linjär avbildning
- Definitionsmängd - domän,
- Målmängd-codomän

Mål 1.8

För betyget godkänd skall du kunna:

- avgöra om en given avbildning är linjär

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara varför eliminationsmetoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär

Transformation -- Avbildning

En *funktion* eller *transformation* eller *avbildning*

T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

är en regel som
till varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n$ kallas funktionens *definitionsområde* eller *domän*.

$\mathbb{R}^m$ kallas funktionens *codomän* eller *målbild*.

Beteckningen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ läses
" T är en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ "

Avbildning som ges av en matris.

- Om A är en $m \times n$ -matris så ger varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ en vektor $A\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$.
- Vi har således en avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
- Vi kan också skriva
$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{ges av} \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

Definition: Linjär avbildning

- En avbildning T kallas *linjär* om

i.
$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i T :s domän.

i.
$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

för alla $\mathbf{u}$ i T :s domän och alla skalära c .

Avbildning som ges av matris är linjär.

- Antag att A är en $m \times n$ -matris.
- Matrimultiplikation har då följande egenskaper:
- (i) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$
- (ii) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalära c .
- Slutsats $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en linjär avbildning.

1.9 Matrisen till en linjär transformation

Viktiga begrepp

- Standardmatris, avbildningsmatris
- Injektiv , ett-ett, one-to-one
- Surjektiv , på, onto

Mål 1.9

För betyget godkänd skall du kunna:

- bestämma standardmatrisen till en linjär avbildning F då $F(\mathbf{v})$ är givet för tillräckligt många vektorer $\mathbf{v}$.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bestämma standardmatrisen till linjära avbildningar som ges av en geometrisk beskrivning
- besvara frågor om injektivitet och surjektivitet för linjära avbildningar.

Sats 10. Matrisen till en linjär avbildning.

Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning.

Då finns en unik matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$

Denna matris kallas standardmatrisen eller avbildningsmatrisen till avbildningen T

Matrisen A är den $m \times n$ -matris som bestäms på följande sätt:

Låt $\mathbf{e}_j$ vara den j :te kolonnen i enhetsmatrisen I_n
och

$$\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j).$$

Då är

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Definition:

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kallas

surjektiv (eng. *onto*),

om och endast om

varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av minst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Värdemängden är i så fall hela $\mathbb{R}^m$

Definition:

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kallas
injektiv eller *en-entydig* (eng. *one-to-one*)
om och endast om
varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av högst en
vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Sats 11

- Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning.
- Då är T **injektiv** om och endast om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ **endast har den triviala lösningen**

Senare i kursen kommer **mängden** $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ kallas **kärnan** (eng. **kernel**) till T eller **nollrummet** (eng. **null space**) till T skrivs $\text{Ker}(T)$ eller $\text{Nul}(T)$.

Vi har alltså att

T är injektiv om och endast om $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$

Sats 12

Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T . Då gäller:

- a. T är *surjektiv*, avbildar $\mathbb{R}^n$ *på, onto* $\mathbb{R}^m$
om och endast om
kolonnerna i A *spänner upp* $\mathbb{R}^m$
- b. T är *injektiv, en-entydig, one-to-one*
om och endast om
kolonnerna i A är *linjärt oberoende*.