

TMV166/186
 Linjär Algebra M/TD
 2009/2010
 Läsvecka 2

Omfattning

- Lay, kapitel 2.1-2.5, Matrisalgebra

Innehåll

- Matrisoperationer: addition av matriser, multiplikation med skalär, matrisinvers, transponering
- Räkneregler för matrisalgebra
- karakterisering av inverterbara matriser
- lite om blockmatriser
- LU-faktorisering, samband med lösning till linjärt ekvationssystem.

2.1 Matrisoperationer

Viktiga begrepp

- summa av matriser
- produkt av matriser
- transponat (transpose) av matris

Mål 2.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- addera matriser
- multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med *rad* • *kolonn*-metoden.
- utnyttja räkneregler i sats 2.1.2 vid beräkningar
- ge exempel som visar att
 - matrismultiplikationen inte är kommutativ.
 - annulleringslagen *inte* gäller, man kan alltså inte "förkorta":
 $AB = AC \not\Rightarrow B = C.$
 - en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
- transponera matriser och utnyttja räkneregler i sats 2.1.3 vid beräkningar

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att $A(BC) = (AB)C.$

Matriskonventioner

- Positionen i rad r och kolonn k kallas position (r,k) .
- Elementen i en matris A betecknas vanligtvis med a .
- Elementet på position (r,k) betecknas a_{rk} eller $(A)_{rk}$
- Kolonnerna i A betecknas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$, eller $\text{col}_1(A), \text{col}_2(A), \dots$
- Raderna i A betecknas $\text{row}_1(A), \text{row}_2(A), \dots$

En generell 4×5 -matris A kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5]$$

$$[\text{col}_1(A) \quad \text{col}_2(A) \quad \text{col}_3(A) \quad \text{col}_4(A) \quad \text{col}_5(A)]$$

$$\begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \\ \text{row}_4(A) \end{bmatrix}$$

Matrisoperationer

- **Addition:** Matriser av samma typ kan adderas. Additionen sker genom att elementen på samma positioner adderas. "Positionsvis addition"

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

- Alla matriselementen multipliceras med skalären:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation

- Om antalet kolonner i A är samma som antalet rader i B kan produkten AB bildas.

Alltså: om A är en $m \times n$ -matris och B är en

$$n \times p \text{-matris, } B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p]$$

så är AB $m \times p$ -matrisen

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Om } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

så är *skalärprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Rad • kolonn - regeln för beräkning av matrisprodukt.

Elementet på position (i,j) i produkten AB är **skalärprodukten** av rad i ur A och kolonn j ur B

$$(AB)_{ij} = \text{row}_i(A) \cdot \text{col}_j(B)$$

Sats 2.1.2, räknelagar för matrisoperationer.

Antag att A , B och C är matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

- a. $A(BC) = (AB)C$ (associativ lag för multiplikation)
- b. $A(B+C) = AB+AC$ (vänsterdistributiva lagen)
- c. $(B+C)A = BA+CA$ (högerdistributiva lagen)
- d. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ för alla skalära r
- e. $I_m A = A = A I_n$ (Identitetsselement för multiplikation)

VARNING!

1. I allmänhet är $AB \neq BA$
2. Av $AB = AC$ kan man **inte** dra slutsatsen $B=C$
3. Av $AB = O$ kan man **inte** dra slutsatsen $A = O$ eller $B = O$

Definition s.114

- Med **transponatet** av en $m \times n$ -matris A menas $n \times m$ -matrisen A^T vars kolonnvektorer är radvektorer i A :

$$\text{col}_i(A^T) = \text{row}_i(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel

Om u är en kolonnvektor är u^T motsvarande radvektor.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad u^T = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$$

skalärprodukten av två kolonnvektorer u och v kan nu skrivas som en matrisprodukt

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = u^T v$$

Sats 2.1.3 Räkneregler för transponering

Låt A och B vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

- a. $(A^T)^T = A$
- b. $(A+B)^T = A^T + B^T$
- c. För alla skalära r är $(rA)^T = rA^T$
- d. $(AB)^T = B^T A^T$ **Notera ordningen!**

2.2 Matrisinvers

Viktiga begrepp

- **matrisinvers**
- **Elementära matriser**

Mål 2.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- tillämpa sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
- beräkna matrisinvers med hjälp av sats 2.2.4 och metoden i exempel 2.2.7.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara varför metoden att beräkna matrisinvers som beskrivs i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.

Definition

- En $n \times n$ -matris A kallas **inverterbar** om det finns en $n \times n$ -matris C sådan att

$$CA = I \text{ och } AC = I$$
 där $I = I_n$ är enhetsmatrisen (identity matrix) av typ $n \times n$.
- Matrisen C är i så fall entydigt bestämd och kallas inversen till A . Inversen betecknas A^{-1} .

Notera att

om A är **inverterbar** så gäller

1. Av $AB = AC$ kan man dra slutsatsen $B = C$.
2. Av $AB = O$ kan man dra slutsatsen $B = O$.

Sats 2.2.4

- Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Om $ad - bc \neq 0$ är A inverterbar med

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
- Om $ad - bc = 0$ är A **inte** inverterbar.
- Talet $ad - bc$ kallas *determinanten* till A .

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det A = -11, \quad A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

Sats 2.2.5

- Om A är en inverterbar $n \times n$ -matris så gäller att för varje b i $\mathbb{R}^n$ har ekvationen $Ax = b$ entydig lösning $x = A^{-1}b$

Definition s.122

Med en **elementär matris** menas en matris E som "utför en elementär radoperation".

Alltså om $A \sim A_1$ via en enda elementär radoperation och $EA = A_1$ så kallas E elementär.

Det finns tre typer av elementära matriser

- Typ 1 som motsvarar att till en rad addera en multipel av en annan rad

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Om $A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$

- så är $E_1 A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) - 4\text{row}_1(A) \end{bmatrix}$

Typ 2

- som motsvarar att två rader byter plats:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Om $A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$

- så är $E_2 A = \begin{bmatrix} \text{row}_2(A) \\ \text{row}_1(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$

Typ 3

- som motsvarar att en rad multipliceras med en skalär $c \neq 0$.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

- Om $A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$

- så är $E_3 A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ c \cdot \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$

Elementära matrizers inverser

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Sats 2.2.7

En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med I_n .

Varje följd av radoperationer som överför A till I_n kommer också att överföra I_n till A^{-1} .

Metod för beräkning av A^{-1}

- Överför matrisen $[A \mid I]$ till reducerad trappstegsform.
- Om denna är $[I \mid B]$ så är $B = A^{-1}$
- Om man inte får ett pivotelement i samtliga kolonner i A så är A inte inverterbar.

2.3 Karakterisering av inverterbara matriser

Viktiga begrepp

- Inga nya begrepp allt handlar om sats 2.3.8
Invertible matrix theorem

Mål 2.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- tillämpa sats 2.3.8 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 2.3.8.

Sats 2.3.8, om inverterbara matrises egenskaper

Låt A vara en kvadratisk $n \times n$ -matris. Då är följande utsagor ekvivalenta.

Alltså, för en given matris A är antingen alla sanna eller alla falska.

- A är en inverterbar matris.
- A är radekvivalent med I_n
- A har n pivotpositioner.
- Ekvationen $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen, $x=0$
- Kolonnerna i A är linjärt oberoende.
- Den linjära avbildningen $x \mapsto Ax$ är injektiv.

Sats 2.3.8, om inverterbara matrises egenskaper

- Ekvationen $Ax = b$ har minst en lösning för varje b i $\mathbb{R}^n$.
- Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- Den linjära avbildningen $x \mapsto Ax$ är surjektiv.
- det finns en $n \times n$ -matris C sådan att $CA = I$
- det finns en $n \times n$ -matris D sådan att $AD = I$.
- A^T är en inverterbar matris.

Förenklande observation

- Om A och B är kvadratiska och $AB = I$ så kan vi dra slutsatsen att $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.
- Vi behöver alltså inte kontrollera att också $BA = I$

Definition: Inverterbar transformation

- En linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en funktion $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$
- Funktionen S kallas då inversen till T och betecknas T^{-1} .
- En funktion är inverterbar om och endast om den är både injektiv och surjektiv. Den kallas då bijektiv.

Sats 2.3.9

- Låt T vara en linjär transformation och låt A vara standardmatrisen för T .
Då är T inverterbar om och endast om A är en inverterbar matris.
- I så fall är den linjära avbildningen S som ges av $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ den inversa avbildningen till T .

Viktig observation

- Notera att om $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så är T **surjektiv** om och endast om **kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$** och **injektiv** om och endast om kolonnerna i A är **linjärt oberoende**.
- Om $n < m$ kan T inte vara surjektiv,
- om $n > m$ kan T inte vara injektiv.

2.4 Blockmatriser

Viktiga begrepp

- **Blockmatris**

Mål 2.4

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga mål i detta avsnitt.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga mål i detta avsnitt.

Blockmatriser i Matlab

- Matriser kan skrivas in i Matlab som *block*, under förutsättning att blocken på samma "rad" innehåller samma antal rader.
 $A = [\text{zeros}(4,3) \text{ ones}(4); \text{eye}(5) \text{ ones}(5,2)]$
 är ett exempel på en 9×7 -matris.
- Även tidigare definierade och namngivna matriser kan användas.
 $B = [A; \text{ones}(1,7)]$ är en 10×7 -matris.
- Om två matriser har blockindelningar som gör operationerna på blocken möjliga så kan matrisoperationerna utföras "blockvis".

2.5 Matrisfaktorisering

Viktiga begrepp

- LU-faktorisering

Mål 2.5

För betyget godkänd skall du kunna:

- bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- inga ytterligare mål

LU-faktorisering

LU-faktorisering av en $m \times n$ -matris A innebär att A skrivs som matrisprodukten
 $A = L \cdot U$

U är den uppåt (Upper) triangulära $m \times n$ -matrisen som erhålls vid eliminering.

L är den nedåt (Lower) triangulära $m \times m$ -matrisen som motsvarar radoperationerna som ger tillbaka A .

Användning av LU-faktorisering

Faktoriseringen kan utnyttjas vid ekvationslösning genom:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow L \cdot U\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 & -12 \end{bmatrix}^T$$

då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 0 & -5 & 3 \\ -9 & 5 & -5 & 12 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= L \cdot U$$