

TMV166/186
 Linjär Algebra M/TD
 2009/2010
 Läsvecka 3

Omfattning

- Lay, kapitel 3.1-3.3, Determinanter

Innehåll

Determinanter: beräkning, egenskaper och användning

3.1 Introduktion till determinanter

Viktiga begrepp

- **determinant**
- **cofaktorutveckling**

Mål 3.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga ytterligare mål i detta avsnitt

Definition

- Determinanten av en 2×2 -matris A definieras som

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant av större storlek

- Determinanten av en $n \times n$ -matris definieras med hjälp av "utveckling efter rad 1"
- Om A är en $n \times n$ -matris så låter vi A_{ij} beteckna $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen som vi får om rad i och kolonn j stryks ur A .
Med cofaktor C_{ij} menas $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
Definitionen av determinant kan då formuleras:
$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \dots + a_{1n}C_{1n}$$

Determinantberäkning

- **Sats 1** Determinanter kan beräknas genom utveckling efter vilken rad eller kolonn som helst.
- Satsen säger att:
$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in}$$
- Detta kallas **utveckling efter rad i**
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$
- Detta kallas **utveckling efter kolonn j** .

Sarrus regel

- En 3×3 -determinant kan beräknas med **Sarrus regel**:

$$= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$$

OBSERVERA!

- **Det finns ingen liknande beräkningsprocedur för större determinanter.**
- För 4×4 -determinanter och större är beräkning genom utveckling efter rad eller kolonn, i kombination med satser i nästa avsnitt, det effektivaste beräkningssättet.

Sats 3.1.2

- Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

3.2 Determinantens egenskaper

Viktiga begrepp

- radoperationer
- kolonnoperationer
- multiplikativa egenskaper

Mål 3.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- förenkla kalkylerna med hjälp av sats 2, 3 och 5
- utnyttja sats 4 för att avgöra om en matris är inverterbar
- tillämpa sats 6 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$ (sats 4)

Sats 3.2.3

- Om B erhålls av A genom en elementär radoperation så gäller
 - a) Om en multipel av en rad i A adderas till en annan rad:

$$\det(B) = \det(A)$$
 - b) Två rader i A byter plats:

$$\det(B) = -\det(A)$$
 - c) En rad i A multipliceras med en skalär k

$$\det(B) = k \det(A)$$

Sats 3.2.4

- En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$
- Bevis: Antag att A är radekvivalent med en trappstegsmatris U
 Då vet vi att A är inverterbar om och endast om U har pivotelement i varje rad och varje kolonn. Detta är ekvivalent med att $\det(U) \neq 0$.
 Upprepad användning av sats 3' ger att

$$\det(U) \neq 0 \leftrightarrow \det(A) \neq 0$$
 och satsen följer.

Sats 3.2.5

- Om A är en kvadratisk matris så är

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Sats 3.2.6

- Om A och B är $n \times n$ -matriser så är

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$
- **OBS!!** $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ utom i undantagsfall.

3.3 Cramers regel, volym och linjära avbildningar

Viktiga begrepp

- den adjungerade matrisen, adjunkten, till en matris
- areaskala, volymskala

Mål 3.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- utnyttja Cramers regel (sats 7) i problemlösning
- beräkna invers till 3×3 -matris med hjälp av sats 8

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa Cramers regel (sats 7)
- redogöra för determinantens tolkning som area- eller volym skala för en linjär avbildning

Cramers regel

Antag att A är en inverterbar $n \times n$ -matris.

Låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ och låt $A_i(\mathbf{b})$ beteckna matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ där kolonn nr i ersatts av $\mathbf{b}$.

Då ges lösningen $\mathbf{x}$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av:

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Definition

- Cofaktorerna till matrisen A ges av $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
- Den till A adjungerade matrisen, adjunkten till A , är

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Sats 8 En formel för inversmatris

- Låt A vara en inverterbar matris.
- Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Sats 9 Determinanten som area eller volym

- Om A är en 2×2 -matris är $|\det(A)|$ arean av parallelogrammen som spänns upp av A 's kolonner.
- Om A är en 3×3 -matris är $|\det(A)|$ volymen av parallelepipeden som spänns upp av A 's kolonner.

Sats 10 Determinanten som area- eller volym skala

- Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
- Låt S vara ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område.
- Då gäller:
arean av $T(S) = |\det(A)| \cdot (\text{arean av } S)$
- Samma gäller om $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ och area ersätts av volym.