

Linjär Algebra M1 (TMV 165))

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

1 Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? (2p)

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1. Ange en motsvarande egenvektor. (2p)

(c) Avgör vilken/vilka av matriserna som är inverterbara:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3p)$$

(d) A är matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 7 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Matlab-komandot `>> B = rref(A)` ger resultatet

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange rangen för A samt en bas för *nollrummet* till A .

(e) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) En linjär avbildning F från \mathbf{R}^3 till \mathbf{R}^2 avbildar $[1, 0, 0]^T$ på $[2, 3]^T$, $[0, 1, 0]^T$ på $[0, 1]^T$ och $[0, 0, 1]^T$ på $[2, -1]^T$. Ange avbildningsmatrisen för F . (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2 (a) Lös, enligt metoden med utökad matris, ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

(b) Bestäm x_1 med hjälp av Cramers regel. (3p)

3 Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A . (3p)

(b) Bestäm en formel för A^k . (3p)

VÄND!

- 4 Beräkna (med minsta kvadratmetoden) en approximativ lösning till ekvationssystemet (6p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

- 5 Med \mathbb{P}_3 menas det linjära rummet vars element är reella polynom av grad högst 3. Avbildningen $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ definieras av $T(p(t)) = p''(t) + p(t)$ (6p)

- (a) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på den naturliga basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.
- (b) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$.
- (c) Ange sambandet mellan de två avbildningsmatriserna med hjälp av transformationsmatrisen för basbytet ($\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$).

- 6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- (a) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning.
- (b) Om A är en 5×3 - matris så är rangen för A högst 3.
- (c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A
- (d) Om en matris A är diagonaliserbar så är A symmetrisk.
- (e) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A X = A^T B$ minst en lösning.
- (f) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A X = A^T B$ högst en lösning.

- 7 (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

- (b) Bevisa att varje mängd, bestående av n linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^n , spänner upp \mathbb{R}^n . (4p)

- (c) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum av ett vektorrum. (1p)

Lycka till!
Carl-Henrik