MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa
Datum: 2008-01-16 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Martin Berglund
tel. 0762-721860

Linjär Algebra TD1 (tmv185)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida 17/1. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2p)

(b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för F samt bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

(c) Låt A vara matrisen (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Bestäm baser till både kolonnrumet, $\mathrm{Col}(A)$, och nollrumet, $\mathrm{Nul}(A)$, för A. Ange A:s rang, $\mathrm{Rank}(A)$.

(d) Ange alla rella tal h sådana att vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & h \end{bmatrix}^T$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. (2p)

(e) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$. Vektorn $\mathbf{v}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Ange vektorn $\mathbf{v}$:s koordinater i standardbas. (2p)

(f) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -8 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Var god vänd!

3. Bestäm en ortogonal matris P som diagonaliserar matrisen (8p)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ange också en diagonal matrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$ samt beräkna M^n för godtyckliga $n \geq 1$.

4. Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av följande linjärt oberoende vektorer: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en ortogonal bas i U. (3p)

(b) Bestäm det ortogonala komplementet $U^{\perp}$. (3p)

5. Bestäm det plan $z = ax + by + c$ som är bäst anpassat, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 5)$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A är en 3×3-matris så är $\det(3A) = 3\det(A)$

(b) Varje linjärt ekvationssystem $AX = B$ med fler obekanta än ekvationer, har oändligt många lösningar.

(c) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så kan de inte vara linjärt beroende.

(d) Om A är en $n \times n$-matris och $\text{Row}(A) = \mathbb{R}^n$ så är A^T inverterbar.

(e) Linjen $x_1 - 2x_2 = 1$ är ett underrrum i $\mathbb{R}^2$.

(f) $(\text{Col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A^T)$.

7. (a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde till en kvadratisk matris. (2p)

(b) Bevisa att om $A^k = 0$ för något k så har A endast noll som sitt egenvärde. (2p)

(c) Låt λ vara ett egenvärde till en inverterbar matris A. Visa att $\lambda \neq 0$ och att λ^{-1} är ett egenvärde till matrisen A^{-1}. (2p)

Lycka till!
C-H F