

## Linjär Algebra TD1 (tmv186 och 185)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrant och tydligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 11/3. Resultat meddelas via Ladok troligen före påsk men senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskningstillfälle prel. V1 period 4, meddelas per epost, dessutom alla vardagar 9-13, MV:s exp.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.  
**Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) ett blad.**

(a) Beräkna determinanten  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}$  (2p)

(b) Matrisen till den linjära avbildningen  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  har egenvektorerna  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$  till egenvärdet  $-2$  och  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$  till egenvärdet  $3$ .  
 Ange bilden av vektorn  $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$ . (2p)

(c) För vilket/vilka värden på parametern  $a$  är  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}^T \right\}$  inte en bas för  $\mathbb{R}^4$ ? (3p)

(d) Ange vektorn  $\mathbf{v}$  då  $\mathbf{v}$  har koordinatvektorn  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$  i basen  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$  (2p)

(e) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(f) Beskriv hur du kan bestämma alla lösningar till ovanstående ekvationssystem med hjälp av MATLAB. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen (6p)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Var god vänd!**

3. Lös följande system av linjära differentialekvationer. (9p)

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

4. Bestäm den andragradskurva  $y = ax^2 + bx + c$  som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna  $(x, y) = (-2, 2), (-1, 1), (0, 1), (1, 2), (2, 3)$ . (9p)

Bestäm felvektorn och rita en figur som åskådliggör de givna punkterna, den erhållna andragradskurvan och felvektorns koordinater.

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl och ange hur du kan bestämma kurvan med hjälp av MATLAB.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om totalmatrisen till ett ekvationssystem reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är  $[ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 0 ]$  så är ekvationssystemet inte lösbart.

(b) Om de kvadratiska matriserna  $A$  och  $B$  är radekvivalenta så har de samma egenvärden.

(c) Om  $A$  är en kvadratisk matris med  $\det A = 0$  så är  $\lambda = 0$  ett egenvärde till  $A$

(d) Om  $A$  är en  $n \times n$ -matris och  $\dim(\text{Col}(A)^\perp) > 0$  så är  $A^T$  inte inverterbar.

(e) Antag att  $A$  är en  $n \times n$ -matris och att  $\mathbf{b}_1$  och  $\mathbf{b}_2$  är olika vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Om ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$  har entydig lösning så måste  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$  också ha entydig lösning.

(f) Om  $\text{Rank} [ A \mid \mathbf{b} ] = \text{Rank}(A)$  så har ekvationen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  minst en lösning.

6. Definiera begreppet linjär avbildning (transformation) från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$ . Förklara varför varje linjär avbildning från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$  kan ges av en matris och redogör för hur man bestämmer matrisen. Förklara också varför en linjär avbildning från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^n$  är bijektiv (ono-to-one and onto) om och endast om avbildningens matris är inverterbar. (6p)

Om du i denna uppgift väljer att reda ut motsvarande i en allmän situation  $F : V \rightarrow W$  där  $V$  och  $W$  är linjära rum så kan detta vägas in i totalbedömningen.

Lycka till!  
C-H F