MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2007-03-15 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Martin Berglund

tel. 0762-721860

Linjär Algebra M (tmv165)

Skriv tentamenskod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor detta läsår inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens aktuella webbsida 17/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskningstillfälle meddelas via ebrev. Dessutom alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **ENDAST LÄMNA IN SVAR**, alltså utan lösningar. **Endast svaren bedöms. Samla dessa i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Matrisen till den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har egenvektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet -4 och $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet 3. Ange bilden av vektorn $2v_1 - 3v_2$. (2p)

(c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

är radekvivalenta. Ange baser för noll- och kolonnrummen till A.

(d) Ange minstakvadratlösningen till ekvationsystemet (2p)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ \quad\;\; y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

(e) En bas för $\mathbb{R}^2$ är $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T\}$ Ange koordinatvektorn $[x]_{\mathcal{B}}$ då $x = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(f) Redogör för hur man, med hjälp av MATLAB, löser ekvationen $Ax = b$, då A är matrisen i (c) ovan och $b = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$. Du behöver inte lösa ekvationen. (2p)

(g) Redogör för hur man, med hjälp av MATLAB, löser uppgift (d) ovan. Det finns flera sätt, beskriv alla du kan. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (9p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Bestäm i så fall en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$. **Var god vänd!**

(b) Utnyttja (a) för att lösa följande system av differentialekvationer

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Om du inte löst (a) redogör för metoden.

(c) Motivera metoden du använt eller redogjort för i (b).

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av (6p)

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $u_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $u_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

(a) Finn en ON-bas i M.

(b) Bestäm koordinaterna för u_1, u_2 och u_3 i denna bas.

4. Vad menas med ett underrum i $\mathbb{R}^4$? (9p)

Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & a-1 & a & a \end{bmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{bmatrix} a & a+2 & 3a+3 & 0 \end{bmatrix}^T$, $u_4 = \begin{bmatrix} -1 & a-1 & a-2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Bestäm $\dim U$ för varje värde av den reella konstanten a. Vad blir $\dim U^{\perp}$? Motivera svaret.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Ekvationen $Ax = b$ saknar lösning om och endast om $b \notin \operatorname{Col} A$.

(b) Om A är en $n \times n$-matris och $\dim(\operatorname{Col}(A)^{\perp}) = 0$ så är A^T inte inverterbar.

(c) Minstakvadratlösningen till $Ax = b$ är lösning till $Ax = \operatorname{proj}_{\operatorname{Col}(A)} b$.

(d) Om A är matrisen för en vridning i $\mathbb{R}^2$ vinkeln $\pi/2$ så är $A^4 = I$.

(e) Mängden $\{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : |x_1| = |x_2|\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(f) Om A är en reell $m \times n$ matris så finns det en ortogonal matris P så att $P^T(A^TA)P$ är diagonal.

6. (a) Vad betyder det att vektorerna $v_1, \ldots, v_k$ är linjärt oberoende? (6p)

(b) Låt u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ vara nollskilda vektorer. Antag att $u \cdot v = 0$, $u \cdot w = 0$ och att v och w är linjärt oberoende. Visa att u, v, w är linjärt oberoende.

(c) Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.
Avgör om $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1\}$ också är en bas för $\mathbb{R}^4$.

Lycka till!
Carl-Henrik