MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 100313 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Magnus Goffeng
0703-088304

TMV186/185 Linjär algebra TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar inklusive bonuspoäng från "kryssuppgifter"2010.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida måndagen den 15/3. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, därefter granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Bestäm skalären p i matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning.

(b) Låt $p = 0$ i matrisen A. Lös med hjälp av Cramers regel x_3 ur ekvationssystemet (3p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Definiera vad som menas med ett *egenvärde* och en *egenvektor* till en $n \times n$ matris A. (2p)

(b) Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P sådan att $A = PDP^{-1}$, där (4p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. För matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

bestäm:

(a) $\operatorname{Rank} A$ och en bas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

(b) En bas för $\operatorname{Nul} A$. (2p)

(c) En ortonormerad bas för $\operatorname{Col} A$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på deluppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Verifiera att matrisen (6p)

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

har egenvektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Visa att A är standardmatrisen för spegling i ett visst plan genom origo; ange speciellt en ekvation för detta plan. Bestäm slutligen standardmatrisen för ortogonalprojektion på samma plan.

6. Visa att om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$, med n element, så är varje mängd vektorer i V, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ med $p > n$, linjärt beroende. Använd sedan detta för att visa att *dimensionen* av ett vektorrum är väldefinierad, dvs att alla baser till ett vektorrum innehåller lika många vektorer. (6p)

7. Avgöra vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, dvs : Om du hävdar att ett påstående är SANT så måste du förklara varför (rätt svar utan motivering belönas ej). Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du däremot hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du illustrera varför med ett exempel.

(a) Låt n vara ett positivt heltal. För alla $n \times n$ matriser A och B gäller att $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$. (2p)

(b) Om A och B är radekvivalenta 3×3-matriser så har A och B samma egenvärden. (2p)

(c) Låt A vara en diagonaliserbar 3×3 matris med egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3. Då gäller att (2p)

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	TMV186/185 Linjär algebra TD 100313	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar och svar redovisas på anvisad plats.

(a) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyller $F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$, $F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}^T$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}^T$. Ange standardmatrisen för F. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna A^{-1}, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Ett underrum H i $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T\right\}$. (3p)
Visa att $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör H och bestäm koordinatvecktorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm den räta linje som är bäst anpassad till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1,3)$ enligt minstakvadratmetoden. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Lös matrisekvationen $XA + B = X$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....