MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 110113 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Ragnar Freij, 0703-088304

TMV186/185 Linjär algebra TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2010 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Bestäm, med hjälp av resultatet i (a), lösningen till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 8x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = -10x_1(t) - 7x_2(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 1. \end{cases}$$

3. (a) Förklara vad som menas med att säga att matrismultiplikation är *associativ*. (1p)

(b) Illustrera med ett exempel att matrismultiplikation inte är *kommutativ*. (1p)

(c) Lös matrisekvationen (4p)

$$(AX + B)^T = X^T C,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm värdet på a som gör vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende. (3p)

(b) Låt nu $a = 1$ och låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^3$ bestående av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. Bestäm koordinatvektorn $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ då $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}^T$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt V och W vara vektorrum och $T : V \to W$ en avbildning. Definiera vad som menas med

i. *Kärnan* $K(T)$ och *värdemängden* $R(T)$ till T.

ii. att T är en *linjär* avbildning.

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter. Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ vara den linjära avbildning som ges av

$$T[p(t)] = (t^2 + t + 1)p''(t) - (1 + 2t)p'(t) + 2p(t).$$

Ange baser för de tre underrummen $K(T)$, $R(T)$ och $K(T)^{\perp}$ i $\mathbb{P}_2$. (Obs! För det tredje, identifiera $\mathbb{P}_2$ med $\mathbb{R}^3$ på det vanliga sättet).

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en 45-graders 'moturs' rotation kring en axel genom origo och i riktningen $\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. (6p)

Bestäm T:s matris i standardbas på formen PMP^T (Obs! Du behöver inte multiplicera ut).

Bestäm också $T(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

7. (a) Definiera begreppet : A är en *ortogonalmatris.*

(b) Bevisa att om A är en $n \times n$ ortogonalmatris, så är $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Bevisa att om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till en ortogonalmatris A, så är $|\lambda| = 1$.

Lycka till!
Carl-Henrik F

Anonym kod	TMV186/185 Linjär algebra TD 110113	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\det(AB)$.

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: .... VÄND!

(d) Bestäm en ON-bas för planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....