TMV186/185 Linjär algebra TD

Lösningar

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$ är en lösbar vektorekvation. Totalmatrisen för vektorekvationen blir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix},$$

och det svarar mot ett lösbar ekvationssystem om och endast om $h-5=0$, dvs, om och endast om $h=5$.

SVAR: $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om $h=5$.

(b) Totalmatrisen som svarar mot ekvationssystemet är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Den sista matrisen är i trappstegsform, och andra kolonnen är då den enda kolonnen som inte är en pivotkolonn, och svarar alltså då mot en fria variabel, som vi kan kalla för t.

Vi får då att allmänna lösningen blir:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}.$$

SVAR: Allmänna lösningen är: $x_1 = 10 - 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

(c) Volymen av parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ ges av $\det(A)$ där $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$.

Eftersom att dra ifrån två gånger tredje raden från den andra raden inte påverkar determinanten, så får vi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling längs första kolonnen } \}$$
$$= 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (5 - 12) = -35.$$

SVAR: Volymen är $|\det(A)| = 35$.

(d) Vi får med hjälp av basbytesmatriser att

$$\mathbf{v} = P_B(\mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sedan uppfyller $(\mathbf{v})_C$ att $P_C(\mathbf{v})_C = \mathbf{v}$, och motsvarande totalmatris är:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

så $(\mathbf{v})_C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}^t$.

Svar:

$$(\mathbf{v})_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(e) Multiplicerar vi ekvationen med B från höger, så får vi

$$2A + X = B$$

och drar vi ifrån $2A$ får vi då:

$$X = B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svar:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(f) u ligger i $W = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ om och endast om u är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, vilket den är om och endast om vektorekvationen $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$ är lösbar. Totalmatrisen för vektorekvationen är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Totalmatrisen svarar då mot ett icke lösbart ekvationssystem (eftersom sista raden svarar mot $0 = 4$), så $\mathbf{u}$ ligger inte i W.

Svar: $\mathbf{u}$ ligger inte i W

2. Vi börjar med att ta fram reducerade trappstegsformen för A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Eftersom 1:a, 2:a och 5:e kolonnerna är pivotkolonner, så bildar motsvarande kolonner i A en bas för $\operatorname{Col} A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\operatorname{Col} A$.

(b) Från trappstegsformen ovan, så ser man att x_3 och x_4 blir fria variabler (säg, s och t) i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och att den allmänna lösningen till ekvationen är:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9s + 3t \\ 5s - 7t \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Enligt metoden för att ta fram en bas för $\operatorname{Nul} A$, blir då vektorerna som står efter s och t en bas för $\operatorname{Nul} A$.

SVAR: Vektorerna

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för $\operatorname{Nul} A$.

(c) Vi ser från (a) och (b) att $\operatorname{Col} A$ respektive $\operatorname{Nul} A$ har baser som består av 3 respektive 2 element, så $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 3$ och $\dim \operatorname{Nul} A = 2$.

SVAR: $\operatorname{rank} A = 3$ och $\dim \operatorname{Nul} A = 2$.

3. Ett sätt att se det är att en linjär avbildning S skall uppfylla att $S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, eftersom $S(\mathbf{0}) = S(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, medan T uppfyller $T(\mathbf{0}) = \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$.

Att T inte är linjär kan också ses mer direkt, t.ex.

$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{t} \neq \mathbf{x}+\mathbf{t}+\mathbf{y}+\mathbf{t} = T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y}),$$

eller om $c \neq 1$,

$$T(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x}+\mathbf{t} \neq c(\mathbf{x}+\mathbf{t}) = cT(\mathbf{x}).$$

4. (a) Det karakteristiska polynomet p är:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -9 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling längs 3:e raden } \} =$$
$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

Egenvärdena är rötterna till det karakteristiska polynomet, dvs, $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$.

SVAR: Egenvärdena till A är 1 och 2.

(b) Vi får fram egenvektorer till ett egenvärde λ genom att bestämma $\mathrm{Nul}(A-\lambda I)$. För $\lambda = 1$ får vi:

$$\begin{bmatrix}(A-I) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom andra kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara $3t$) i ekvationen $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 3t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

För $\lambda = 2$ får vi:

$$\begin{bmatrix}(A-2I) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & \\ -9 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Eftersom tredje kolonnen inte är en pivotkolonn svarar den mot en fri variabel (som vi låter vara t) i ekvationen $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, och vi får att allmänna lösningen till ekvationen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

SVAR: Egenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 1$ är alla vektorer

$$t\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, \quad t \neq 0,$$

och egenvektorer för A med egenvärde $\lambda = 2$ är alla vektorer

$$t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

(c) Enligt (b), så kan man bara hitta två linjärt oberoende egenvektorer till A (valfri nollskild multipel av $\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix}^t$, och valfri nollskild multipel av $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^t$), men för att A skall vara diagonaliserbar skall det finnas tre stycken linjärt oberoende egenvektorer, så A är alltså inte diagonaliserbar.

SVAR: A är inte diagonaliserbar.

5. (a) Om A är en $m \times n$-matris, och $b \in \mathbb{R}^m$, så är en *minstakvadratlösning* till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ sådan att $||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|| \leq ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) För att anpassa andragradspolynomet $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ i punkterna $-1, 0, 1$ och 2 till värdena $0, -2, -2$ och 2, så bildar man matrisen

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

och vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det andragradspolynom som är bäst anpassat till värdena är då det polynomet med koefficienter β_0, β_1, β_2 där $\beta = \begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}^t$ är en minstakvadratlösning till $X\beta = \mathbf{y}$. Minstakvadatlösningarna till $X\beta = \mathbf{y}$ ges av lösningarna till normalekvationen $X^tX\beta = X^t\mathbf{y}$. Vi får att

$$X^tX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

och

$$X^t\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Så totalmatrisen för minstakvadratlösningen blir:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -50/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -23/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix}$$

Alltså blir minstakvadratlösningen $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -23/10 & -9/10 & 15/10 \end{bmatrix}^t$.

Svar: Andragradspolynomet som är bäst anpassat till värdena enligt minstakvadrat-metoden är $p(x) = -23/10 - (9/10)x + (15/10)x^2$.

Del 2: Överbetygsdelen

6. (a) Projektionen $\mathbf{p}$ av en vektor $\mathbf{w}$ på linjen L som spänns upp av $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Vi får då att projektionerna blir:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3} + 0}{3 + 1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{0 + 1}{3 + 1} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Svar: Projektionerna $\mathbf{p}_1$ och $\mathbf{p}_2$ av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på L är:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

(b) Speglingarna blir enligt formeln $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{w}$:

$$\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{s}_2 = 2\mathbf{p}_1 - \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\mathbf{e}_1$ speglas till $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{e}_2$ speglas till $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t$.

(c) Standardmatrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är matrisen

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}.$$

Vi skall alltså då ta fram vad $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ avbildas på under T.

Speglingen av en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^t$ i x-axeln är $\begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \end{bmatrix}^t$.

Speglar vi $\mathbf{e}_1$ i L, så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$, och speglar vi sedan $\mathbf{s}_1$ i x-axeln går den då på $\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{t}_1$.

Speglar vi $\mathbf{e}_2$ i L, så får vi enligt (b) att den går på $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t$, och speglar vi sedan $\mathbf{s}_2$ i x-axeln går den då på $\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}^t$, och vi får att $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{t}_2$.

Så standardmatrisen för T är

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Svar: Standardmatrisen för T är:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(d) Matrisen för rotation i $\mathbb{R}^2$ med θ radianer moturs är:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

så om vi låter $\theta = -\pi/3$, så blir $R = A$, där A är standardmatrisen för T från (c).

Svar: T är rotation med $-\pi/3$ radianer moturs.

7. (a) Med hjälp av produktformeln för determinanter $\det(CD) = \det(C)\det(D)$, och att $\det(I_n) = 1$, där I_n är enhetsmatrisen, så får man att $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Dessutom gäller produktformeln för fler än två matriser, och vi får då att

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(A)(1/\det(B)) = \det(A).$$

Så påståendet är Sant.

(b) Enligt satsen om inverterbara matriser, så har en 3×3-matris A linjärt oberoende kolonner (e.) om och endast om den är inverterbar (a.). Igen, enligt satsen om inverterbara matriser, så är A inverterbar (a.) om och endast A^t är inverterbar (l.). Använder vi då satsen om inverterbara matriser på A^t, så får vi då att A^t är inverterbar om och endast om A^t har linjärt oberoende kolonner. Men eftersom kolonnerna till A^t är (transponatet av) raderna till A, så får vi då att kolonnerna till A är linjärt oberoende om och endast om raderna till A är linjärt oberoende. Så påståendet är Sant.

(c) En 3×2-matris kan aldrig ha linjärt oberoende rader, eftersom de då bildar 3 stycken vektorer i $\mathbb{R}^2$. Så vilken 3×2-matris med linjärt oberoende kolonner ger ett motexempel till påståendet. Till exempel kan vi ta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

där kolonnerna är linjärt oberoende, men inte raderna.

8. (a) Se Lay, avsnitt 6.2.

(b) Se Lay, Sats 6.2.4.