CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Vetenskaper
Carl-Henrik Fant, Lennart Falk

16 december 2011

Matematik med Matlab för M, Td, E, V, Vt 2012.

LAB 3: Minsta-kvadrat metoden

Matematisk modellering

Då matematiken tillämpas i verkligheten görs det genom att man formulerar en matematisk modell som, mer eller mindre bra, beskriver verkligheten. eller snarare våra observationer av verkligheten. Med en bra modell kan man göra prognoser för hur något kommer att bete sig i en ännu inte observerad situation. I allmänhet innebär den matematiska modellen att man formulerar samband mellan olika storheter. Sambanden kan vara av många olika slag, funktionssamband, differentialekvationer, differensekvationer etcetera. Det är en stor konst att ställa upp bra samband och inte okontroversiellt vad som är bra.
Det vi skall titta på i denna övning är hur en viss modell kan anpassas till aktuella mätdata.

Kalibrering av materialmodell (konstitutivmodell)

(Med tack till Mikael Enelund som formulerat uppgiften.)

I hållfasthetsläran härör ofta sambanden mellan spänning och töjning från observationer. Utifrån observationerna utvecklas en matematisk modell, kallad materialmodell eller konstitutivmodell, som stämmer överens med de gjorda observationerna.

Det finns ett stort antal sådan materialmodeller (konstitutiva modeller) för vanliga konstruktionsmaterial, tex Hookes lag eller den elastiska-idealplastiska modellen för stål och flera viskoelastiska modeller, tex Maxwell eller Kelvin, för plaster. Alla modellerna formuleras genom någon ekvation som beskriver samband mellan töjning och spänning. Dessa ekvationer innehåller konstanter eller parameterar som är specifika för ett speciellt material. Parameterarna bestäms ur standardiserade experiment. När parameterarna har bestämts används de i den konstitutiva ekvationen för hållfasthetsberäkningar på strukturnivå.

Metaller vid hög temperatur kryper. Med detta menas att om vi håller spänningen konstant så ökar deformationen (töjningen) med tiden. Detta är en viskoelastisk effekt.

Experiment har visat att spännings-töjningsförhållandet är icke-linjärt. En ofta använd modell för krypning hos metaller vid förhöjd temperatur är Nortons model (se Grundläggande Hållfashetslära, Hans Lundh).

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{c}} = \frac{1}{\tau}\left|\frac{\sigma}{\sigma_{\mathrm{c}}}\right|^{n} \tag{1}$$

där $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ är kryptöjningshastigheten, σ_{c} är en referensspänning. Tidskonstanten τ och exponenten n är konstanter eller parameterar som bestäms ur experiment. Värdet på τ beror på valet av σ_{c}, som kan ses som en normeringsfaktor. Att bestämma parameterarna utifrån experiment kallas *kaliberering.*

Uppgift

Parameterarna i Nortons modell skall anpassas till experimentella kryppdata för koppar vid $T = 250°\mathrm{C}$.

i	1	2	3	4	5
σ [MPa]	49,1	75,6	105,1	130,5	150,4
$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ [s^{-1}]	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$

Tabell 1: Experimentella värden på töjningshastigheten för olika spänningsnivåer för koppar vid 250°C

.

Ur tabellen ser vi att vid spänningsnivån $\sigma = 49,1\mathrm{MPa}$ är töjningshastigheten $1,4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}^{-1}$ dvs det tar $t = 0,01/1,4 \cdot 10^{-8} \approx 7,1 \cdot 10^{5}\,\mathrm{s} \approx 200\,\mathrm{h}$ för materialet att krypa (töjas) 1%. Vi ser att töjningshastigheten ökar snabbt med spänningsnivån.

Vi börjar med att skriva om Nortons modell ekv (1) mha logaritmering till

$$\ln\left(\dot{\varepsilon}^{\mathrm{c}}\right) = n \ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\mathrm{c}}}\right) - \ln\left(\tau\right) \tag{2}$$

Vi väljer referensspänningen $\sigma_{\mathrm{c}} = 1\mathrm{MPa}$. Varje mätpunkt ger då ett linjärt samband för de obekanta n och $\ln(\tau)$.

Vi får således ett linjärt ekvationssystem med två obekanta och fem ekvationer. Skriv detta ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} n & \ln(\tau) \end{bmatrix}^T$ och A och $\mathbf{b}$ ges av mätdata.

Kontrollera med `rref` att detta system inte har någon lösning.
Bestäm sedan minstakvadratlösningen dels genom att lösa ekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ med hjälp av `rref`, och dels med $\mathbf{x} = A\backslash\mathbf{b}$.
När parametrarna, n och τ, har bestämts rita grafer till sambanden (1) och (2) för intervallet $\sigma \in [49, 150]\,\mathrm{MPa}$. I samma figur skall de experimentellt bestämdaa punkterna läggas in.