CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Vetenskaper
Carl-Henrik Fant

16 december 2011

Matematik med Matlab för M, Td, E, V, Vt 2012.

LAB 4: Egenvärden och egenvektorer

Diagonalisering av matriser, egenvärden och egenvektorer.

Matlabs kommando `eig` kan utnyttjas för att bestämma såväl egenvärden som egenvektorer till en kvadratisk matris.

Med `L=eig(A)` erhålls en kolonnmatris `L` vars element är egenvärdena till $n \times n$-matrisen `A`.

Med `[S,D]=eig(A)` erhålls två $n \times n$-matriser. Dels `S` vars kolonner är egenvektorer till `A`, dels diagonalmatrisen `D` vars diagonalelement är egenvärdena till `A` i motsvarande ordning. Kolonnerna i `S` är normerade. Om `A` är symmetrisk är kolonnerna i `S` dessutom parvis ortogonala, `S` är en ortogonal matris, $S^T = S^{-1}$.

Observera att `[S,D]=eig(A)` ger resultat även om `A` **inte** är diagonaliserbar, detta inträffar om `A` har något egenvärde med större multiplicitet än egenrummets dimension. Egenvärdena räknas upp i `D` enligt multipliciteten, men motsvarande kolonner i `S` är inte linjärt oberoende. Den erhållna matrisen S är inte inverterbar, produkten `inv(S)*A*S` beräknas glatt av Matlab, resultatet kan oftast bli `D`, men där ges en varning: *Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 1.110223e-16.*

Uppgift 1: Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser. Undersök om matriserna är diagonaliserbara med reella matriser eller med komplexa matriser eller inte alls. Undersök också om den diagonaliserande matrisen är ortogonal eller ej.

a. $Aa = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

b. $Ab = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

c. $Ac = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $Ad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

. □

Tillämpningar

Spänningsmatrisen

Spänningsmatrisen $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ beskriver normalspänningar σ och skjuvspänningar τ i plan parallella med koordinatplanen, genom en kropp, ett kontinuum, som påverkas av inre och yttre krafter. Egenvektorer till matrisen $\mathcal{S}$ är huvudspänningsriktningarna, motsvarande egenvärden är normalspänningen i plan vinkelräta mot egenvektorn. I dessa plan är skjuvspänningen noll. Matrisen $\mathcal{S}$ är alltid symmetrisk och därmed alltid diagonaliserbar.

Spänningsvektorn $\mathbf{s}$ på en viss snittyta med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ ges av $\mathbf{s} = \mathcal{S}\mathbf{n}$.

Normalspänningen på snittytan ges av längden av projektionen av spänningsvektorn på planets enhetsnormal, $\sigma = \mathbf{n}^T \mathcal{S}\mathbf{n}$. Skjuvspänningen på snittytan är längden av spänningsvektorns projektion på snittytan. Denna beräknas enkelt med Pythagoras sats: $\tau^2 = \|s\|^2 - \sigma^2$

Om $\mathbf{n}$ är en normerad egenvektor till $\mathcal{S}$ så är $\mathbf{s} = \mathcal{S}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$, där λ är motsvarande egenvektor. I det fallet är $\sigma = \|s\| = \lambda$ och $\tau = 0$. Därav begreppet huvudspänning och huvudspänningsriktning.

Uppgift 2: Spänningstillståndet i en punkt Q i en kropp har beräknats med finita-elementmetoden och uttrycks i ett kartesiskt koordinatsystem (x; y; z) med spänningsmatrisen

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 10 \\ 10 & 10 & 30 \end{bmatrix} \quad MPa$$

a. Beräkna normal- och skjuvspänning på en snittyta med normalvektor $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1, 2, 0 \end{bmatrix}^T$.

b. Beräkna huvudspänningar och huvudspänningsriktningar.

$\square$

System av differentialekvationer.

Matrisexponentialfunktionen.

Ett enkelt sätt att lösa $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ är med hjälp av matrisexponentialfunktionen. För att något förstå dess definition utgår vi från diagonaliseringsmetoden.
Antag att $\mathbf{A}$ är en diagonaliserbar matris. Det innebär att det finns en matris $\mathbf{P}$ så att $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$ där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris.
Om vi nu gör substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\rho$ så erhåller vi ,
$\mathbf{P}\rho' = \mathbf{A}\mathbf{P}\rho$, dvs $\rho' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\rho = \mathbf{D}\rho$.

Utskrivet blir det $\begin{cases} \rho_1'(t) &= r_1\rho_1(t) \\ \cdots & \\ \rho_n'(t) &= r_n\rho_n(t) \end{cases}$

Löser vi dessa ekvationer så får vi $\rho_i = c_i e^{r_i t}, \quad i = 1, \cdots, n$ vilket kan skrivas $\rho = \mathbf{B}\mathbf{c}$,

där $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & \cdots 0 \\ \cdots & \\ 0 \cdots & e^{r_n t} \end{bmatrix}$

Transformerar vi tillbaka så får vi $\mathbf{x} = \mathbf{P}\rho = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} c_1 e^{r_1 t} \\ \cdots \\ c_n e^{r_n t} \end{bmatrix} = c_1 e^{r_1 t}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{r_n t}\mathbf{v}_n$

Antag nu att vi har begynnelsevillkoren $x_1(0) = x_{01}, \cdots, x_n(0) = x_{0n}$ eller kortare: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$
Då blir $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\mathbf{c}$ (ty $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ för $t = 0$) och därmed är $\mathbf{c} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$. Vi kan därför skriva $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$.
Genom att skriva $e^{r_i t}$ som en Maclaurinserie, $e^{r_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(r_i t)^k$, så inser man efter en smula eftertanke att diagonalmatrisen $\mathbf{B}$ kan skrivas som

$$\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\mathbf{D})^k$$

och eftersom $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$ så får vi

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\mathbf{A})^k.$$

Det är nu naturligt att göra följande

Definition:

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\mathbf{A})^k.$$

$e^{t\mathbf{A}}$ är en matris som är definierad även om A *ej* är diagonaliserbar, och det visar sig att det går att derivera som "vanligt", dvs

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}.$$

Sammanfattningsvis: Differentialekvationen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

har lösningen

$$\mathbf{x} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0, \qquad \text{där}$$

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(t\mathbf{A})^k.$$

Om $\mathbf{A}$ är *diagonaliserbar* så är

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}, \qquad \text{där}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots; \mathbf{v}_n], \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n} \end{bmatrix} \text{ och lösningen kan då skrivas}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{c} = c_1 e^{r_1 t}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{r_n t}\mathbf{v}_n,$$

där $\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$.

Exempel 1: Vi löser $\begin{cases} x' = -4x + 6y, & x(0) = 7 \\ y' = -3x + 5y, & y(0) = 4 \end{cases}$

Här är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ och egenvärdena blir:

$0 = \begin{vmatrix} r+4 & -6 \\ 3 & r-5 \end{vmatrix} = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2), \quad r_1 = -1,\ r_2 = 2.$ Egenvektorerna: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Alltså är

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ger $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{och } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningen blir

$$\begin{cases} x = 6e^{-t} + e^{2t} \\ y = 3e^{-t} + e^{2t} \end{cases}$$

Anm: Här är $e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{2t} & -2e^{-t} + 2e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & -e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$, och

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-t} + e^{2t} \\ 3e^{-t} + e^{2t} \end{bmatrix}$$

$\square$

Vi skall nu låta Matlab använda denna metod för att lösa system av differentialekvationer. I matlab skrivs e^{At} som `expm(A*t)`.
Eftersom `expm` inte kan räkna med objekt större än matriser så måste expm(A*t) räknas ut för ett t-värde i taget.

Exempel 2: Vi löser systemet av linjära differentialekvationer $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_2 - x_1$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = -2$ i intervallet [0,10] på följande sätt:

```
A=[1,1;-1,1];x0=[1;-2];
t=linspace(0,10,400);
x=zeros(2,length(t));
for i=1:length(t)
x(:,i)=expm(t(i)*A)*x0;
end
plot(t,x(1,:),t,x(2,:))
```

$\square$

Skriv in ovanstående som en skript-fil och testa att den fungerar.

Uppgift 3:

a. Lös differentialekvationssystemen $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(0) = (1, 2, -1)'$ med hjälp av `expm(A*t)` för $A = Aa, \quad Ab, \quad Ac, \quad Ad$ ovan. Rita grafen till lösningskurvorna. Lös också systemen med diagonaliseringsmetoden och jämför resultaten. Tänk lite extra på Ad.

b. Gör om ekvationen $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$ till ett system av första ordningens differentialekvationer med hjälp av substitutionen $y_1 = y, \quad y_2 = y'$. Lös detta med exponentialfunktionen för matriser. Rita lösningskurvan.

$\square$