

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

$$(a) A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A) = 2 \quad (2p)$$

$$(b) \text{Bas för Nul}(A) \text{ är } \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3p)$$

Lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, är

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2p)$$

$$(c) B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2p)$$

$$(e) (M, V, Z) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \quad (2p)$$

$$(TD) x_1 = -2 \quad (2p)$$

$$(f) \text{Egenvektorer } \mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0. \quad (2p)$$

$$2. (a) \text{ Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen } A = \begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} \quad (4p)$$

Lösning: Egenvärden är lösningarna till karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Egenvärden -1 och 3.

Egenvektorer är icke-triviala lösningar till $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Egenvektorer till egenvärdet -1 är $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Egenvektorer till egenvärdet 3 är $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

$$(b) \text{ Antag att en partikel rör sig i ett kraftfält och att dess lägesvektor } \mathbf{x} \text{ satisfierar } (3p) \text{ differentialekvationen } \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \text{ där } A \text{ är som ovan och } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lös detta begynnelsevärdesproblem.

Lösning: Lösningarna till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ är $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$.

Begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vars

lösning är $c_1 = 2$, $c_2 = -1$

Alltså $\mathbf{x}(t) = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$.

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

Lösning: De fyra mätningarna ger upphov till fyra ekvationer $y_i = a + b \cdot t_i$. På

$$\text{matrisform } A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y} \text{ där } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet saknar lösning varför vi bestämmer bästa linjen med minsta-kvadrat-metoden och bestämmer lösningen till $A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}$ alltså till

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Detta har lösningen } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Den bästa linjen har alltså ekvationen $y = \frac{6}{5} + \frac{7}{5}t$.

$$\text{Medelfelet är } \frac{1}{\sqrt{4}} \left\| A \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} - \mathbf{y} \right\| = \sqrt{0.8} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

4. Planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = [1 \ -1 \ 0]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [2 \ 0 \ -1]^T$. Bestäm en ON-bas för planet och sedan matrisen för projektionen av en vektor \mathbf{x} på detta plan. (6p)

Lösning: Bestämmer först en ortogonal bas för planet, antingen genom Gram-Schmidts metod eller med hjälp av $[1 \ 1 \ 2]^T$ som är normal till planet.

Med $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1$ får vi

$$\mathbf{u}_1 = [1 \ -1 \ 0]^T \text{ och } \mathbf{u}_2 = [1 \ 1 \ -1]^T$$

En ortonormerad bas får vi genom normering.

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ -1 \ 0]^T \text{ och } \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ -1]^T.$$

$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är alltså den sökta ON-basen.

Projektionsmatrisen kan vi nu bestämma på flera olika sätt.

Projektionen Av en vektor \mathbf{x} på planet W är $\mathbf{x}_W = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{b}_2$.

I detta samband kan vi antingen låta \mathbf{x} vara en godtycklig vektor $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, beräkna projektionen och identifiera matrisen. Eller beräknar vi projektionen av vektorerna i standardbasen och får kolonnerna i projektionsmatrisen. Eller kan vi skriva om sambandet till $\mathbf{x}_W = B B^T \mathbf{x}$ där B är 3×2 -matrisen $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2]$.

Projektionsmatrisen är alltså

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ definieras av (6p)

$$T(p(t)) = \int_0^t p(s)(s+1)ds.$$

$1+t^2$ har vi $T(p(t)) = \int_0^t (1+s^2)(s+1)ds = \int_0^t (1+s+s^2+s^3)ds = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4$
som alltså är en vektor i \mathbb{P}_4

(a) Visa att T är en linjär avbildning.

Lösning: Om $p(t)$ och $q(t)$ är två polynom så är $T(p(t) + q(t)) = \int_0^t (p(s) + q(s))(s+1)ds = \int_0^t p(s)(s+1)ds + \int_0^t q(s)(s+1)ds = T(p(t)) + T(q(t))$

Om c är en skalär är $T(cp(t)) = \int_0^t cp(s)(s+1)ds = c \int_0^t p(s)(s+1)ds = cT(p(t))$.

Ovanstående likheter är direkt utnyttjande av räkneregler för integraler.

Vi har alltså att $T(p(t) + q(t)) = T(p(t)) + T(q(t))$ och $T(cp(t)) = cT(p(t))$ för alla skalärer c och alla vektorer i \mathbb{P}_2 . Således är T linjär.

(b) bestäm matrisen M för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

Lösning: Avbildningsmatrisen M ges av

$$M = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{C}}]$$

$$T(\mathbf{b}_1) = \int_0^t 1(s+1)ds = \frac{1}{2}t^2 + t. \quad [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} = [0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0]^T$$

$$T(\mathbf{b}_2) = \int_0^t s(s+1)ds = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2. \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} = [0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad 0]^T$$

$$T(\mathbf{b}_3) = \int_0^t s^2(s+1)ds = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3. \quad [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{C}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}]^T$$

Avbildningsmatrisen är således:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm koordinaterna för $T(1 - 2t + 3t^2)$ i basen \mathcal{C} med hjälp av en matrismultiplikation med M ovan.

Lösning: $[T(1 - 2t + 3t^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om en utökad matris reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \quad 0]$ så är det associerade ekvationssystemet inte lösbart.

Svar: Falskt

(b) Om A är en 3×4 matris så kan avbildningen $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ inte vara en-entydig (injektiv).

Svar: Sant

(c) Om A och B båda är inverterbara $n \times n$ matriser så är $\mathbf{x} = A^{-1}B^{-1}$ en lösning till matrisekvationen $AX = XB$.

Svar: Falskt

(d) Det är möjligt att konstruera en 3×4 matris A sådan att $\dim \text{Col } A = 2$ och $\dim \text{Nul } A = 2$.

Svar: Sant

Svar: Sant

(f) Om $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ för alla \mathbf{x} och \mathbf{y} i \mathbb{R}^n , så måste kolonnerna i A vara ortonormerade.

Svar: Sant

7. Formulera och bevisa Pythagoras sats i \mathbb{R}^n . (6p)

Svar: Formulering: se sats 2 i kapitel 6.1.

Beviset är en del av resonemanget före satsen:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \dots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

Lycka till!

C-H F