Lösningsförslag: Linjär Algebra E/M/Td/V/Z

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange värdet av $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. (2p)

Svar: 30

(b) Ange en trappmatris som är radekvivalent med totalmatrisen för ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Svar: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{array}\right]$

(c) Ange den symmetriska koefficientmatrisen till den kvadratiska formen (1p)
$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Svar: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Ange egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. (3p)

Svar: Egenvärden 4 och 2. Egenvektorer till egenvärdet 4 är $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Egenvektorer till egenvärdet 2 är $t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

(e) Ange bas för nollrum till $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Svar: $\{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$

(f) Låt P vara en ortogonal matris. (3p)

Ange $P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ då $P\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (två möjligheter).

Svar: $\begin{bmatrix} \pm\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm LU-faktoriseringen av A. (3p)

Svar: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Bestäm inversen till A. (3p)

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Låt (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(a) Bestäm en bas för Col(A).

Lösning och svar: Pivotkolonnerna nr. 1, 2 och 4.

Alltså är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T\}$ en bas för Col(A).

(b) Bestäm en ON-bas för Col(A).

Lösning och svar: Gram-Schmidt processen och normering ger ON-basen:

$\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T\}$

4. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en andragradskurva $y = a + b \cdot t + c \cdot t^2$ (6p) till följande data

t	-2	-1	0	1	2
y	5	0	0	-2	1

Rita en beskrivande figur.

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata (mätpunkter), så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

Lösning och svar: Konstanterna a, b, c skall uppfylla:

$$\begin{cases} a & -2b & +4c & = & 5 \\ a & -1b & +1c & = & 0 \\ a & +0b & +0c & = & 0 \\ a & +1b & +1c & = & -2 \\ a & +2b & +4c & = & 1 \end{cases}$$

Detta system saknar lösning. Minsta-kvadratmetodens lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösning till $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Då $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är

$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$ och $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 22 \end{bmatrix}$.

Lösningen till $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ är $a = -\frac{6}{5},\ b = -1,\ c = 1$.

Projektionen av $\mathbf{b}$ på Col(A) är

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Felvektorn är $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n} = || \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} ||/\sqrt{5} = \frac{\sqrt{14}}{5}$

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av att $T(\mathbf{x})$ är speglingen av $\mathbf{x}$ i planet $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. (6p)

(a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$ i vilken matrisen för T är en diagonalmatris. Ange denna diagonalmatris D och bestäm $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}$ då $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1, 2, 3]^T$.

Svar: Varje bas för $\mathbb{R}^3$, som består av två vektorer i planet och den tredje ortogonal mot planet, duger. Till exempel kan $\mathcal{B} = \{[2, 1, 0]^T,\ [-1, 0, 1]^T,\ [1, -2, 1]^T\}$ väljas.

Matrisen för T är då $D =$diag$(1, 1, -1)$.och $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} =$diag$(1, 1, -1)[1, 2, 3]^T = [1, 2, -3]^T$.

Med annan ordning på vektorerna i basen kan minustecknet flyttas.

(b) Ange basbytesmatrisen P för koordinatbyte mellan standardbas och basen $\mathcal{B}$. Bestäm $\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{x})$ då $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [1, 2, 3]^T$.

Svar: Kolonnerna i P är basvektorerna ovan. Här är $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [3, -5, 5]^T$ och $T(\mathbf{x}) = P[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [-3, 7, -1]^T$.

(c) Vilket samband råder mellan standardmatrisen M för T och matriserna P och D ovan.

Svar: $M = PDP^{-1}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) För alla kvadratiska matriser A, B och C, gäller att om $A \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

Svar: Falskt

(b) För alla kvadratiska matriser A, B och C, gäller att om $\det(A) \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

Svar: Sant

(c) Om Rank$[A|\mathbf{b}] =$ Rank(A) så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.

Svar: Sant

(d) Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt.

Svar: Falskt

(e) Om A är en symmetrisk matris och $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt. Sant

Svar: Sant

(f) Det finns en 6×3-matris, A, sådan att $(\text{Col } A)^{\perp}$ har dimension 2.

Svar: Falskt

7. Antag att $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd av nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$. (6p)

Bevisa att $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \cdots,\ \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende.

Svar: Se boken, 6.2 sats 4.