MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa
Datum: 2008-03-10 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Marcus Warfheimer
tel. 0762-721860

Linjär Algebra TD1 (tmv186 och 185)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrannt och tydligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 11/3. Resultat meddelas via Ladok troligen före påsk men senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskningstillfälle prel. V1 period 4, meddelas per epost, dessutom alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad.**

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}$ (2p)

$$\left| \quad \right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & 1 \end{vmatrix} (+1)(-1) = \begin{vmatrix} -1 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

(-1)

(b) Matrisen till den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet -2 och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet 3. Ange bilden av vektorn $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$. (2p)

$$F(2\bar v_1 + 5\bar v_2) = 2F(\bar v_1) + 5F(\bar v_2) = 2(-2)\bar v_1 + 5 \cdot 3 \bar v_2 = [11 \quad 7]^T$$

(c) För vilket/vilka värden på parametern a är $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}^T\}$ *inte* en bas för $\mathbb{R}^4$? (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -10 & -3 \\ 0 & -3 & -15 & a-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}$ är ~~en~~ inte bas för $\mathbb{R}^4 \iff a = 4$

(d) Ange vektorn $\mathbf{v}$ då $\mathbf{v}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{C} = \{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ (2p)

$$\bar v = 1\bar v_1 - 1\bar v_2 + 2\bar v_2 - 2\bar v_3 = [6 \quad 3 \quad 7 \quad 3]^T$$

då $\bar v_1 = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ osv.

(e) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -6 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 + x_4 \\ x_2 = -1 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \text{ fri} \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}$$

$$\bar{x} = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T + s[-3 \ 2 \ 1 \ 0]^T + t[1 \ -2 \ 0 \ 1]^T$$

(f) Beskriv hur du kan bestämma alla lösningar till ovanstående ekvationssystem med hjälp av MATLAB. (2p)

Definiera C1 = [1 2 -1 3 -1; 2 1 4 0 1; -2 0 -6 2 -2];
och C2 = rref(C1) som är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ här utläses lösningen som ovan.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen (6p)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AXB = C \Leftrightarrow AX = CB^{-1}$ eftersom $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ är inverterbar. $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$CB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $AX = CB^{-1}$ löses med Gausselimination

$[A|CB^{-1}] \sim [I|X]$ om A inverterbar annars

$[A|CB^{-1}] \sim [U|E]$ där U är radreducerad trappmatris som ger X med parametrar.

Här $\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Lös följande system av linjära differentialekvationer. (9p)

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

$\bar{x}' = A\bar{x} \iff \bar{x}' = PDP^{-1}\bar{x} \iff (P^{-1}\bar{x})' = D(P^{-1}\bar{x})$ om A är diagonaliserbar. $P^{-1}(\bar{x}') = (P^{-1}\bar{x})'$ eftersom P^{-1} är en matris ~~vars~~ element är skalärer. Varje koordinat i $P^{-1}\bar{x}$ är en linjärkombination av $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Derivering är en linjär operation.

Sätt $\bar{y} = P^{-1}\bar{x}$. Då är $\bar{x} = P\bar{y}$ och vi har

$$(P^{-1}\bar{x})' = D(P^{-1}\bar{x}) \iff \begin{cases} \bar{y}' = D\bar{y} \\ \bar{x} = P\bar{y} \end{cases}$$

$$\bar{y}' = D\bar{y} \iff \begin{cases} y_1 = \lambda_1 y_1 \\ y_2 = \lambda_2 y_2 \\ y_3 = \lambda_3 y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ y_3 = C_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases}$$

$$P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3] \Rightarrow \bar{x} = y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + y_3\bar{v}_3 = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\bar{v}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t}\bar{v}_3$$

A är diagonaliserbar $\iff$ Det finns en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till A.

I så fall är $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3)$ där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är egenvärdena och $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är egenvektorsbasen. $P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -6 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -6 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$ egenvärden 1 och 2 (mult 2)

$\lambda = 1$ $A\bar{v} = 1\bar{v} \iff (A - I)\bar{v} = \bar{0}$

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-I)\bar{v} = \bar{0} \iff \bar{v} = t\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$ $A\bar{v} = 2\bar{v} \iff (A - 2I)\bar{v} = \bar{0}$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-2I)\bar{v} = \bar{0} \iff \bar{v} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ egenvektorsbas.

$P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$ diagonaliserar A $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(1, 2, 2)$

$$\bar{x} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Bestäm den andragradskurva $y = ax^2+bx+c$ som är bäst anpassad, i minstkvadratmetodens mening, till punkterna $(x,y) = (-2,2),\ (-1,1),\ (0,1),\ (1,2),\ (2,3)$. (9p)

Bestäm felvektorn och rita en figur som åskådliggör de givna punkterna, den erhållna andragradskurvan och felvektorns koordinater.

För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl och ange hur du kan bestämma kurvan med hjälp av MATLAB.

Varje punkt (x_i, y_i) ger en ekvation som skall uppfyllas om kurvan går genom punkten.
$y_i = ax_i + bx_i + c$
De fem punkterna ger ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 2 = a(-2)^2 + b(-2) + c \\ 1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 = a0^2 + b\cdot 0 + c \\ 2 = a1^2 + b\cdot 1 + c \\ 3 = a2^2 + b\cdot 2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\bar{u} = \bar{b}$$

Detta saknar lösning
Vi söker då $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ så att $\|A\bar{u} - \bar{b}\|$ är minimal
Detta är uppfyllt om och endast om $A\bar{u}$ är projektionen av $\bar{b}$ på Col A vilket ~~[illegible]~~ i sin tur är ekvivalent med att
$A\bar{u} - \bar{b} \in (\mathrm{Col}\,A)^{\perp} = \mathrm{Nul}\,A^T$
Vi söker således $\bar{u}$ så att $A^T(A\bar{u} - \bar{b}) = \bar{0}$
$\bar{u}$ skall alltså vara lösning till den normaliserade ekvationen $A^TA\bar{u} = A^T\bar{b}$

$$A^TA\bar{u} = A^T\bar{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}\bar{u} = \begin{bmatrix} 23 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Total matris

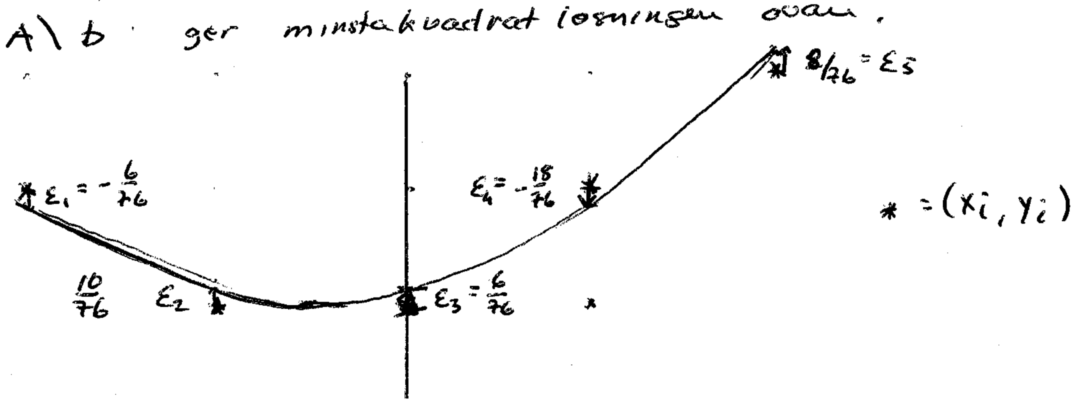
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 23 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 35 & 38 \end{array}\right]$$

$a = \frac{5}{14}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = \frac{38}{35}$

Andragradskurvan $y = \frac{1}{70}(25x^2 + 21x + 76)$

$$A\bar{u} = \frac{1}{70}A\begin{bmatrix} 25 \\ 21 \\ 76 \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 134 \\ 80 \\ 76 \\ 122 \\ 218 \end{bmatrix} \quad \text{Felvektor } A\bar{u} - \bar{b} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 6 \\ -18 \\ 8 \end{bmatrix} = \bar{\varepsilon}$$

Enklaste matlab lösningen
```
A=[4 -2 1; 1 -1 1; 0 0 1; 1 1 1; 4 2 1]; b=[2 1 1 2 3]';
u = A\b
```
ger minstakvadrat lösningen ovan.



5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om totalmatrisen till ett ekvationssystem reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ så är ekvationssystemet inte lösbart.

Koeff. matrisen har pivotpos. i varje rad ⇒ konsistent för alla högerled. F

(b) Om de kvadratiska matriserna A och B är radekvivalenta så har de samma egenvärden.

Enkelt motexempel $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olika egenvärden. F

(c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A

$\det(A - 0 \cdot I) = \det A = 0 \Rightarrow 0$ egenvärde. S

(d) Om A är en $n \times n$-matris och $\dim(\mathrm{Col}(A)^{\perp}) > 0$ så är A^T inte inverterbar.

$(\mathrm{Col}\, A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$

$\dim(\mathrm{Nul}(A^T)) > 0 \Rightarrow A^T$ ej inverterbar S

(e) Antag att A är en $n \times n$-matris och att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är olika vektorer i $\mathbb{R}^n$. Om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ har entydig lösning så måste $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ också ha entydig lösning.

$A\bar{x} = \bar{b}_1$ entydig lösn för något $\bar{b}$, ⇒ $A\bar{x} = \bar{0}$ har entydig lösn. ⇒ (Då A $n \times n$) A inverterbar ⇒ $A\bar{x} = \bar{b}$ har entydig lösn för alla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ S

(f) Om $\mathrm{Rank}\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right] = \mathrm{Rank}(A)$ så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.

$\mathrm{Rank}[A \mid b] = \mathrm{Rank}\, A \Rightarrow [A \mid b]$ har inte pivotposition i sista kolonnen ⇒ $Ax = \bar{b}$ är konsistent. S

6. Definiera begreppet linjär avbildning (transformation) från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Förklara varför varje linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ kan ges av en matris och redogör för hur man bestämmer matrisen. Förklara också varför en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ är bijektiv (ono-to-one and onto) om och endast om avbildningens matris är inverterbar. (6p)

Om du i denna uppgift väljer att reda ut motsvarande i en allmän situation $F : V \to W$ där V och W är linjära rum så kan detta vägas in i totalbedömningen.