MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa
Datum: 2007-03-15 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Martin Berglund
tel. 0762-721860

Linjär Algebra M (tmv165)

Skriv tentamenskod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor detta läsår inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens aktuella webbsida 17/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskningstillfälle meddelas via ebrev. Dessutom alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **ENDAST LÄMNA IN SVAR**, alltså utan lösningar. **Endast svaren bedöms. Samla dessa i ordning på** (om möjligt) **ett blad.**

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$. Svar: -21 (2p)

(Lösning: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -21$)

(b) Matrisen till den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har egenvektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet -4 och $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ till egenvärdet 3. Ange bilden av vektorn $2v_1 - 3v_2$. (2p)

Svar: $F(2\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2) = [-7 \ \ -10]^T$

(Lösning: $F(2\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2) = 2F(\bar{v}_1) - 3F(\bar{v}_2) = 2\lambda_1 \bar{v}_1 - 3\lambda_2 \bar{v}_2 = -8\bar{v}_1 - 9\bar{v}_2$)

(c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

är radekvivalenta. Ange baser för noll- och kolonnrummen till A.

Svar: Bas för Col A är $\mathcal{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4\}$
där $\bar{a}_1 = [1 \ 3 \ 2 \ 0]^T$, $\bar{a}_2 = [-2 \ -6 \ -4 \ 1]^T$, $\bar{a}_4 = [1 \ 2 \ 1 \ 1]^T$
Bas för Nul A är $\mathcal{C} = \{[-2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T, [-3 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T\}$
(Lösning: $A\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow U\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = s[-2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T + t[-3 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
Pivotkolonner: kolonn 1, 2, 4)

(d) Ange minstakvadratlösningen till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ \quad\ \ y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Svar: $\bar{x} = [1 \ -1]^T$

(Lösning: $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$)

(e) En bas för $\mathbb{R}^2$ är $\mathcal{B} = \{[\ 1 \quad 2\ ]^T, [\ 2 \quad -1\ ]^T\}$ Ange koordinatvektorn $[x]_{\mathcal{B}}$ då $x = [\ 1 \quad 7\ ]^T$. (2p)

Svar: $[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = [3 \ \ -1]^T$

(Lösning: $P_{\mathcal{B}}[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \bar{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}[\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\bar{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$)

(f) Redogör för hur man, med hjälp av MATLAB, löser ekvationen $Ax = b$, då A är matrisen i (c) ovan och $b = [\ 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0\ ]^T$. Du behöver inte lösa ekvationen. (2p)

```
A=[1,-2,1,1,2;3,-6,3,2,6;2,-4,2,1,4;0,1,1,1,0];
b=[1,4,3,0]';
C=rref([A,b])
```

Då är $C = [U \ V]$ med $v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]'$

Om $v_4 \neq 0$ så saknas lösning. Annars $\bar{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(g) Redogör för hur man, med hjälp av MATLAB, löser uppgift (d) ovan. Det finns flera sätt, beskriv alla du kan. (2p)

Enklast: `A=[1 -1; 0 1; 2 1]; b=[2 -1 1]'; x=A\b.`

Annars: `x = inv(A'*A)*A'*b`

eller `C=rref([A'*A A'*b]); x = C(:,3)`

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (9p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Bestäm i så fall en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

(b) Utnyttja (a) för att lösa följande system av differentialekvationer

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Om du inte löst (a) redogör för metoden.

(c) Motivera metoden du använt eller redogjort för i (b).

Lösning: Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\lambda+3) & 0 & -(\lambda+3) \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -4 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = -(\lambda+3)^2(\lambda-6)$ Egenvärden $\lambda_{1,2} = -3$ $\lambda_3 = 6$

Egenvektorer: $A\bar{v} = -3\bar{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{v} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A\bar{v} = 6\bar{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{v} = t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonaliserar A; $A = PDP^{-1}$ där

$D = \mathrm{diag}(-3, -3, 6)$

2b, c $\quad \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) \iff \bar{x}'(t) = PDP^{-1}\bar{x}(t) \iff P^{-1}\bar{x}'(t) = DP^{-1}\bar{x}(t)$

sätt $P^{-1}\bar{x}(t) = \bar{y}(t)$ Då är $\bar{y}'(t) = (P^{-1}\bar{x}(t))' = P^{-1}(\bar{x}'(t))$

eftersom P har konstanta termer.

Vi får $\quad \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) \iff \begin{cases} \bar{y}'(t) = D\bar{y}(t) \\ \bar{x}(t) = P\bar{y}(t) \end{cases}$

$$\bar{y}'(t) = D\bar{y}(t) \iff \begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t) \\ y_2'(t) = -3y_2(t) \\ y_3'(t) = 6y_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-3t} \\ y_2 = C_2 e^{-3t} \\ y_3 = C_3 e^{6t} \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = P\bar{y}(t) \iff \bar{x}(t) = y_1(t)\bar{v}_1 + y_2(t)\bar{v}_2 + y_3(t)\bar{v}_3$$

$$= C_1 e^{-3t}\bar{v}_1 + C_2 e^{-3t}\bar{v}_2 + C_3 e^{6t}\bar{v}_3$$

$$= C_1 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{6t}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av (6p)

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $u_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $u_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

(a) Finn en ON-bas i M.

(b) Bestäm koordinaterna för u_1, u_2 och u_3 i denna bas.

$M = \text{Col } A$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bas för Col A är $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$

Ortogonal bas $\mathcal{C} = \{\bar{v}_1\ \bar{v}_2\}$ där $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$ och

$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = \bar{u}_2 - \frac{8}{4} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ON-bas $\mathcal{D} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ där

$\bar{w}_1 = \frac{1}{\|\bar{v}_1\|} \bar{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{w}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|} \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) koordinater ges av skalärprodukt

$\bar{u}_1 \cdot \bar{w}_1 = 2$ $\quad \bar{u}_1 \cdot \bar{w}_2 = 0$ $\quad [\bar{u}_1]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{u}_2 \cdot \bar{w}_1 = \frac{8}{2} = 4$ $\quad \bar{u}_2 \cdot \bar{w}_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$ $\quad [\bar{u}_2]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\bar{u}_3 \cdot \bar{w}_1 = \frac{12}{2} = 6$ $\quad \bar{u}_3 \cdot \bar{w}_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}$ $\quad [\bar{u}_3]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

4. Vad menas med ett underrum i $\mathbb{R}^4$? (9p)

Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & a-1 & a & a \end{bmatrix}^T$,
$u_3 = \begin{bmatrix} a & a+2 & 3a+3 & 0 \end{bmatrix}^T$, $u_4 = \begin{bmatrix} -1 & a-1 & a-2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Bestäm dim U för varje värde av den reella konstanten a. Vad blir dim $U^\perp$? Motivera svaret.

$U = \text{Col } A$ där $A = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4] =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & a-1 & a+2 & a-1 \\ 2 & a & 3a+3 & a-2 \\ 2 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ 0 & a-2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & a+3 & a \\ 0 & a-2 & -2a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ 0 & a-2 & 2 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & -2(a+1) & 2-a \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ 0 & a-2 & 2 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}$ $\quad a \neq 2,\ a \neq -1 \Rightarrow$ Rank $A = 4$, dim $U = 4$, dim $U^\perp = 0$

$a = 2$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ Rank $A = 3$, dim $U = 3$, dim $U^\perp = 1$

$a = -1$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ Rank $A = 3$, dim $U = 3$ $\quad$ dim $U^\perp = 1$

$U^\perp = (\text{Col } A)^\perp = \text{Nul}(A^T)$ $\quad$ dim $U^\perp = \dim(\text{Nul } A^T) = 4 - \text{Rank } A^T$
$= 4 - \text{Rank } A = 4 - \dim U$.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Ekvationen $Ax = b$ saknar lösning om och endast om $b \notin \text{Col } A$. $\quad$ S

$Ax = b$ är konsistent $\Leftrightarrow$ $b \in \text{Col } A$

(b) Om A är en $n \times n$-matris och $\dim(\mathrm{Col}(A)^{\perp}) = 0$ så är A^T inte inverterbar.

$\dim(\mathrm{Col}(A)^{\perp}) = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Col} A) = n \Rightarrow A$ inverterbar $\Rightarrow A^T$ inverterbar

F

(c) Minstakvadratlösningen till $Ax = b$ är lösning till $Ax = \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)} b$.

$\hat{x}$ minsta kvadrat lösning $\Leftrightarrow \|A\hat{x} - b\|$ är minimal vilket är uppfyllt precis då $A\hat{x}$ är projektionen av b på $\mathrm{Col}(A)$

S

(d) Om A är matrisen för en vridning i $\mathbb{R}^2$ vinkeln $\pi/2$ så är $A^4 = I$.

A^4 är matrisen för vridning $\pi/2$ fyra gånger, alltså vridning ett helt varv. Matrisen för vridning ett varv är I

S

(e) Mängden $\{[\ x_1 \quad x_2\ ]^T \in \mathbb{R}^2 : |x_1| = |x_2|\}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

$\bar{0} \in M$, $\bar{x} \in M$ och $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\bar{x} \in M$ men M är inte sluten under addition $[1\ -1]^T \in M$, $[1\ 1]^T \in M$ men $[1\ -1]^T + [1\ 1]^T = [2\ 0]^T \notin M$.

F

(f) Om A är en reell $m \times n$ matris så finns det en ortogonal matris P så att $P^T(A^TA)P$ är diagonal.

A^TA är reell symmetrisk.

S

6. (a) Vad betyder det att vektorerna $v_1, \ldots, v_k$ är linjärt oberoende? (6p)

(b) Låt u, v, $w \in \mathbb{R}^n$ vara nollskilda vektorer. Antag att $u \cdot v = 0$, $u \cdot w = 0$ och att v och w är linjärt oberoende. Visa att u, v, w är linjärt oberoende.

(c) Antag att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ är en bas för $\mathbb{R}^{\cancel{3}\,4}$.
Avgör om $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1\}$ också är en bas för $\mathbb{R}^4$.

(a) se boken

(b) Antag $c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_3\bar{w} = \bar{0}$

Då är $\bar{u} \cdot (c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_3\bar{w}) = 0$

räknelagar för skalärprodukten ger

$c_1 \bar{u}\cdot\bar{u} + c_2 \bar{u}\cdot\bar{v} + c_3 \bar{u}\cdot\bar{w} = 0$

och då $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$, $\bar{u}\cdot\bar{w} = 0$ fås vi

$c_1\|\bar{u}\|^2 = 0$ Då $\bar{u} \neq \bar{0}$ är $\|\bar{u}\|^2 \neq 0$

och alltså $c_1 = 0$

Således är $c_2\bar{v} + c_3\bar{w} = \bar{0}$

Men då $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är linjärt oberoende är $c_2\bar{v} + c_3\bar{w} = \bar{0}$ möjligt endast då $c_2 = c_3 = 0$

Alltså $c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_3\bar{w} = \bar{0}$ endast för $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ vilket visar att $\{u, v, w\}$ är ~~en bas~~ för linjärt oberoende

(c) $\{\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\ \bar{v}_4\}$ bas $\Leftrightarrow$ matrisen $A[\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\ \bar{v}_4]$ är inverterbar

$\{\bar{v}_1+\bar{v}_2\ \ \bar{v}_2+\bar{v}_3\ \ \bar{v}_3+\bar{v}_4\ \ \bar{v}_4+\bar{v}_1\}$ bas $\Leftrightarrow$ $[\bar{v}_1+\bar{v}_2\ \ \bar{v}_2+\bar{v}_3\ \ \bar{v}_3+\bar{v}_4\ \ \bar{v}_4+\bar{v}_1]$ inverterbar

Carl-Henrik

$B = [\bar{v}_1+\bar{v}_2\ \ \bar{v}_2+\bar{v}_3\ \ \bar{v}_3+\bar{v}_4\ \ \bar{v}_4+\bar{v}_1]$

$B = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \cdot L$ $\quad B$ är inv.bar $\Leftrightarrow L$ är inv.bar

$L \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ej inv.bar.

ej bas.