Lösningsförslag: Linjär Algebra
M1/TD1 TMV165/166/185/186

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. (2p)

Lösning: Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 + 4R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2,$$

så ändras inte determinanten, medan matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är triangulär så dess determinant är bara produkten av elementen på huvuddiagonalen, nämligen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

(b) Ange en kvadratisk matris som inte är diagonaliserbar. (2p)

Lösning: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är ett exempel. Den har bara ett egenvärde, nämligen $\lambda = 1$, och motsvarande egenrum är bara 1-dimensionellt och spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(c) Ange en ortogonal bas för (2p)
$\text{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T\}$.

Lösning: Kalla de tre vektorerna för $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ resp. $\mathbf{v}_3$. Notera att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ redan. Därför behöver vi bara byta ut $\mathbf{v}_3$ mot

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-7}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

Lösning: Matrisen för A i denna bas är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Då beräknar vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix},$$

som innebär att $A(2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = 7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

(e) Ange alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning: Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$. Koefficientmatrisen är redan i trappstegsform och variablerna x_2, x_4 och x_5 är fria. Den andra raden ger

$$x_3 + 2x_5 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 2x_5.$$

Insättning i den första raden ger

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \Rightarrow x_1 &= 2 + x_3 - x_4 - x_5 \\ &= 2 + (1 - 2x_5) - x_4 - x_5 = 3 - x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Därför ges lösningsmängden av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 - b - 3c \\ a \\ 1 - 2c \\ b \\ c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) Lösningsmängden till ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 0$ är tre linjer i xy-planet. (2p)
Ange ekvationer för var och en av dessa.

Lösning: Determinanten blir noll om två av de tre raderna i matrisen är identiska. Man ser direkt att detta inträffar då antingen $x = 1$, $y = 1$ eller $x = y$, som är ekvationerna för de tre linjerna i lösningsmängden.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (6p)

Matrisen A har egenvärden $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$, båda av multiplicitet 2.

Ge argument som visar att A är diagonaliserbar.

Bestäm en bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A. Ange en matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

Lösning: Det enklaste sättet att inse att A är diagonaliserbar är att konstatera att den är symmetrisk, ty alla symmetriska matriser är diagonaliserbara (Theorem 2, Section 7.1 i Lay). Egenvärdena till A är givna. Vi söker nu motsvarande egenvektorer.

$\lambda_{1,2} = 0$: Vi har

$$A - 0 \cdot I_3 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_{3,4} = 2$: Vi har

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ utgör en bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A. En matris P som diagonaliserar A och motsvarande diagonalmatris D väljs nu enligt

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Då gäller att $A = PDP^{-1}$.

3. Betrakta följande fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$: (6p)

$$\mathbf{u}_1 = [1, 2, p, 3]^T, \mathbf{u}_2 = [1, 1, 1, 1]^T, \mathbf{u}_3 = [2, 1, 0, p]^T, \mathbf{u}_4 = [3, 2, -5, 1]^T.$$

Om $p = 0$ så är $\mathbf{u}_1$ en linjärkombination av de tre övriga vektorerna. Bestäm denna linjärkombination. För vilka andra värden på p är någon av vektorerna en linjärkombination av de övriga.

Lösning: (a) Sätt $p = 0$ och arbeta med den utökade matrisen

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & | & \mathbf{u}_1 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & -5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Efter utförandet av radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - 2R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2, \quad R_3 \mapsto -\frac{1}{3}R_3,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Återsubstitution ger den entydiga lösningen för detta system, nämligen

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2},$$

som innebär att, då $p = 0$,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\left(5\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4\right).$$

(b) De fyra vektorerna är linjärt beroende om och endast om

$$\begin{vmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & p & 0 \\ 1 & 1 & 3 & p \end{vmatrix} = 0.$$

Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - R_1,$$
$$R_3 \mapsto R_3 - 8R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 - 2R_2$$

ändrar inte determinanten, men förvandlar matrisen till

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & p-9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Så determinanten är just $p(9-p)$, och vektorerna är linjärt oberoende om och endast om detta är noll, dvs om och endast om $p = 0$ eller $p = 9$.

4. (a) Antag att A är en 2×2-matris som har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = [1\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [-1\ 1]^T$ med egenvärdena 1 respektive 2. (2p)
Bestäm $\mathbf{x}_n$ för $n = 1, 2, \ldots$ då $\mathbf{x}_0 = [0\ 1]^T$ och $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Med samma A som i (a) betraktar vi systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = [0\ 1]^T$. (4p)
Bestäm $\mathbf{x}(t)$.
För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

Lösning: För mer utförlig motivering, se avsnitt 5.6 och 5.7 i Lay. Det är givet att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a)

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = PD^nP^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-2^n \\ 1+2^n \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathbf{x}(t) = C_1e^t\mathbf{v}_1 + C_2e^{2t}\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{x}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

5. (a) Bestäm ekvationen för den linje som i minstakvadratmetodens mening anpassar bäst till punkterna (-2,-2), (-1,-1), (0,2) och (1,3). (4p)

(b) Låt (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den vektor i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{y}$. Förklara sambandet mellan dessa två deluppgifter.

Lösning: (a) Kalla de fyra givna punkterna för $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3, 4$. Vi söker linjen $y = kx + m$ sådan att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m & k \end{bmatrix}^T$ är minstakvadratlösningen till ekvationssystemet som i matrisform ges av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}.$$

Svar : $y = \frac{1}{5}(9x + 7)$.

(b) Den vektor i $\mathrm{Col}(A)$ som ligger närmast $\mathbf{y}$ är, enligt del (a),

$$A\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -2/5 \\ 7/5 \\ 16/5 \end{bmatrix}.$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är två kvadratiska matriser av samma typ, så gäller $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Lösning: Falskt. T.ex. tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Då är $\det(A) = \det(B) = 0$, men $A + B = I_2$ så $\det(A + B) = 1$.

(b) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$ så gäller $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}=\mathbb{R}^5$.

Lösning: Sant, ty $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

(c) Om A är en matris sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^4$, så har matrisen A minst fyra kolonner.

Lösning: Sant. Att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ medför att $\mathrm{Col}(A)$ har dimension 4, och då måste det uppenbarligen finnas minst 4 kolonner i A.

(d) Mängden av polynom p av formen $p(t) = t^2 + at + b$ där a och b är godtyckliga reella tal bildar ett tvådimensionellt underrum till $\mathbb{P}_2$, rummet av alla polynom av grad högst två.

Lösning: Falskt. Nollpolynomet finns inte med.

(e) Om A är en 3×3-matris sådan att $A^2 = I$, så gäller antingen $A = I$ eller $A = -I$.

Lösning: Falskt. Vilken som helst speglingsmatris uppfyller $A^2 = I$. T.ex. tag $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, som är matrisen för spegling i linjen $x = y$ i xy-planet.

(f) Om A är en 3×3-matris sådan att systemet $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar, så är 2 ett egenvärde till A.

Lösning: Sant, per definition av begreppet *egenvärde*.

7. Definiera begreppen ortogonal matris och symmetrisk matris.

Låt A vara en $n \times n$ matris och betrakta följande egenskaper hos A:

(1) A är ortogonal,

(2) A är symmetrisk,

(3) $A^2 = I$.

Bevisa att två godtyckliga egenskaper ovan alltid medför den tredje.

Lösning:

(a) En kvadratisk matris A sägs vara *ortogonal* om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$. En kvadratisk matris A sägs vara *symmetrisk* om $A = A^T$.

(b) Det finns tre saker att göra.

Fall 1 : Visa att (1) och (2) medför (3).

A är både ortogonal och symmetrisk så därför gäller att $A = A^T = A^{-1}$. Därmed är $I = AA^{-1} = AA^T = AA = A^2$, v.s.v..

Fall 2 : Visa att (2) och (3) medför (1).

A är symmetrisk så $A = A^T$. Att $A^2 = I$ innebär att $A = A^{-1}$. Därför måste $A^{-1} = A^T$, dvs A är ortogonal, v.s.v.

Fall 3 : Visa att (3) och (1) medför (2).

Att $A^2 = I$ medför att $A = A^{-1}$ som ovan. Att A är ortogonal innebär att $A^{-1} = A^T$. Därför härleder vi att $A = A^T$, dvs A är symmetrisk, v.s.v.