TMV166/186 Linjär algebra M/TD

---

1. (a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

Vi beräknar determinanten genom följande operationer: addera -4 ggr kolonn 1 till kolonn 4, utveckla efter rad 1, addera rad 3 till rad 1, utveckla efter rad 1, beräkna determinatenn av den återstående 2x2-matrisen. Alltså:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & -4 \\ 3 & 8 & 6 & -12 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -7 & -5 & -4 \\ 8 & 6 & -12 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -12 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

-4. Då determinanten är $\neq 0$, är matrisen **inverterbar**.

(b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ange en matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$.

Vi testar egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

och ser att motsvarande egenvärden är 2 respektive 6. Därmed är $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

(c) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ och $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ är totalmatriser till tre ekvationssystem. Ange lösningarna till dessa ekvationssystem.

Sista systemet har en pivotposition i högerledet och saknar därmed lösning. I de övriga är andra variabeln fri (icke-pivotkolonn) och sätts som parameter t. Därmed får vi lösningarna

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = \phantom{-1 - {}} t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \phantom{1 - {}} t \\ z = 0 \end{cases}$$

(d) Visa att $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm koordinaterna i standardbas för den vektor $\mathbf{u}$ vars koordinatvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm koordinatvektorn $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

Låt A vara matrisen vars kolonner $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$ är de givna vektorerna. För att visa linjärt oberoende behöver vi lösa systemet $Ax = \mathbf{0}$ och för att bestämma koordinaterna för $\mathbf{v}$ behöver vi lösa systemet $Ax = \mathbf{v}$. Detta kan vi göra samtidigt:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Löser vi det homogena systemet, ser vi att vektorekvationen $x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + x_3\mathbf{b_3} = \mathbf{0}$ endast har lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, därmed är kolonnvektorerna linjärt oberoende. Eftersom deras antal överensstämmer med rummets dimension, utgör de då en bas för $\mathbb{R}^3$.

Löser vi systemet med $\mathbf{v}$ i högerledet, får vi ut koordinatvektorn $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1\ 2\ -2]^T$. Slutligen, koordinaterna i standardbasen för $\mathbf{u}$ är $2\mathbf{b_1} - 1\mathbf{b_2} + 1\mathbf{b_3} = [1\ -2\ 2]^T$.

(e) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ortonormerad bas för detta plan.

Sätt

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'\}$ en ortogonal bas för planet. Det återstår att normera vektorerna. Sätt

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nu är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en ortonormerad bas för planet.

---

2. (a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -5 \end{cases}$$

Vi skriver först systemet i matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 8 & -5 \end{array}\right]$$

Efter ett antal radoperationer har vi överfört systemet i en ekvivalent trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Bakåtsubstitution ger oss den entydiga lösningen

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -1.$$

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T$ som linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T$.

Enligt (a) har vi linjärkombinationen

$$-1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

(c) Är $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}^T\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? Motivera ditt svar.

Titta på trappstegsmatrisen i (a). Motsvarande homogena system har bara triviala lösningen, vilket just innebär linjärt oberoende mellan kolonnerna.

---

3. (a) Ge exempel på 2×2-matriser A och B sådana att $AB \neq BA$

Ta två olika matriser vilka som helst, så fungerar det troligen. T. ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Här får vi $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, medan $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Lös matrisekvationen $AA^TX - X = AB^T$ där $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Vi skriver om systemet som

$$(AA^T - I)X = AB^T. \tag{1}$$

Först beräknar vi

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 0\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sedan

$$AA^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är uppenbarligen inverterbar, så (1) har den entydiga lösningen

$$X = (AA^T - I)^{-1}AB^T. \tag{2}$$

Vi behöver alltså invertera matrisen $AA^T - I$. Vi använder utvidgad matris och utnyttjar att $[AA^T - I|I] \sim [I|(AA^T - I)^{-1}]$:

$$[AA^t - I|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = [I|(AA^T - I)^{-1}]$$

Matrisen $AA^T - I$ är tydligen sin egen invers.

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Substituera allt i (2) så erhålls

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

---

4. Låt V vara det underrum i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ på V. Bestäm avståndet från $\mathbf{x}$ till V.

Underrummet som spänns upp av de givna vektorerna måste vara xz-planet, eftersom de båda har y-koordinaten 0 och inte är parallella. Att projicera en vektor på detta plan innebär att man nollställer y-koordinaten och det efterfrågade avståndet är absolutbeloppet av y-koordinaten. Alltså: **den ortogonala projektionen är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ och avståndet är 2**.

Mera generellt får man annars ortogonalisera basen och använda projektionsformeln $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u_1}}{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_1}}\mathbf{u_1} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u_2}}{\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{u_2}}\mathbf{u_2}$, där $\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2}\}$ är den ortogonala basen. I detta fall skulle vi haft $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

5.

- Visa att avbildningen $F : \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x]$ som definieras genom
$$F(f(x)) = xf'(x) + f(x+1)$$
är linjär.

Man kontrollerar att $F(f+g) = F(f) + F(g)$ och $F(cf) = cF(f)$. Detta följer av konstruktionen av F, att $(f+g)' = f' + g'$, $(f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1)$ samt att $(cf)' = cf'$, $(cf)(x+1) = cf(x+1)$.

- Bestäm F:s matris M i basen $\{1, x, x^2\}$.

Vi opererar på basvektorerna med F:
$$\begin{aligned} F(1) &= x \cdot 0 + 1 = 1, \\ F(x) &= x \cdot 1 + (x+1) = 2x + 1, \\ f(x^2) &= x \cdot (2x) + (x+1)^2 = 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$
Därmed är matrisen för F i basen $\{1, x, x^2\}$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Bestäm F:s matris i en bas som består av egenvektorer till M.

I en bas av egenvektorer, är matrisen för F en diagonalmatris med egenvärdena längs huvuddiagonalen. Men vår matris är triangulär, så dess egenvärden står redan längs huvuddiagonalen. Alltså: matrisen för F i en bas av egenvektorer är
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

6.

- Definiera vad som menas med en *symmetrisk* matris.
- Definiera begreppen *egenvärde* och *egenvektor* till en matris.
- Visa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer som hör till olika egenvärden till den symmetriska matrisen A så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala.

Se läroboken!

7.

- Bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

Se läroboken!

- Vilka värden kan determinanten av en inverterbar matris A anta om alla element i både A och A^{-1} är heltal. Motivera ditt svar.

Vi konstaterar
1) Om en matris endast har heltalselement, så är determinanten ett heltal.
2) $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$
Om produkten i 2) ska bli 1, måste alltså $\det A = \pm 1$.

- Låt A vara en kvadratisk matris. Bevisa att om A^2 har egenvärdet λ^2 så är λ eller $-\lambda$ egenvärde för matrisen A.

Om λ^2 är egenvärde till matrisen A^2, så är λ^2 en karakteristisk rot för A^2: $0 = \det(A^2 - \lambda^2 I) = \det((A - \lambda I)(A + \lambda I)) = \det(A - \lambda I)\det(A + \lambda I)$ (produktsatsen för determinanter). Därmed är antingen $\det(A - \lambda I) = 0$ eller $\det(A + \lambda I) = 0$, vilket innebär att A har något av egenvärdena λ eller $-\lambda$.
